МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВА-ТЕЛЬНОЕУЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Кафедра «Информационные системы в строительстве»

Модели и методы оптимизации и принятия решений

Методические рекомендации к самостоятельной и контрольной работе магистрантов заочной формы обучения направления подготовки
25.04.01 «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей»
программа «Техническая эксплуатация авиационной техники»

Ростов-на-Дону
2022

Методические рекомендации составила к.т.н Батурина Н.Ю.

Методические рекомендации к самостоятельной и контрольной работе магистрантов по дисциплине «Модели и методы оптимизации и принятия решений» разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – магистратура по направлению подготовки 25.04.01 Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей. Методические рекомендации включают краткую теорию, контрольные вопросы по теории, перечень заданий контрольной работы и требования к ее выполнению, примеры выполнения заданий, перечень информационных ресурсов.

Методические рекомендации одобрены на заседании кафедры «ИСвС»Зав. кафедрой: Ляпин А.А.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Модели и методы оптимизации и принятия решений» направлена на подготовку магистрантов к самостоятельной деятельности в области организации и проведения научных исследований, имеет цель дать необходимые для практической деятельности знания по методам оптимизации и принятия решений.

В результате освоения дисциплины «Модели и методы оптимизации и принятия решений» у обучающегося должны сформироваться, определенные учебным планом компетенции, и магистрант должен:

Знать: понятия и методы оптимизации и теории принятия решений (математическое описание постановок задач принятия решений в различных условиях, методы реализации решений с применением инструментальных средств).

Уметь: решать прикладные вопросы в задачах оптимизации и принятия решений с применением различных критериев, в условиях неопределенности и риска.

Владеть: подходами и техникой решения задач оптимизации и принятия решений с использованием инструментальных средств.

Для достижения поставленных целей изучения дисциплины учебным планом предусмотрены лекции, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа и оценка результатов обучения по дисциплине.

1 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Под *принятием решений* будем понимать особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего (оптимального) варианта действий.

Задачи принятия решений отличаются большим многообразием, классифицировать их можно по различным признакам. На рис.1.1 приведена классификация (по применяемым методам) задач принятия решений (ЗПР) и указаны математические методы их решения. Более подробно методы теории принятия решений можно изучить, воспользовавшись информационным ресурсом [1] .

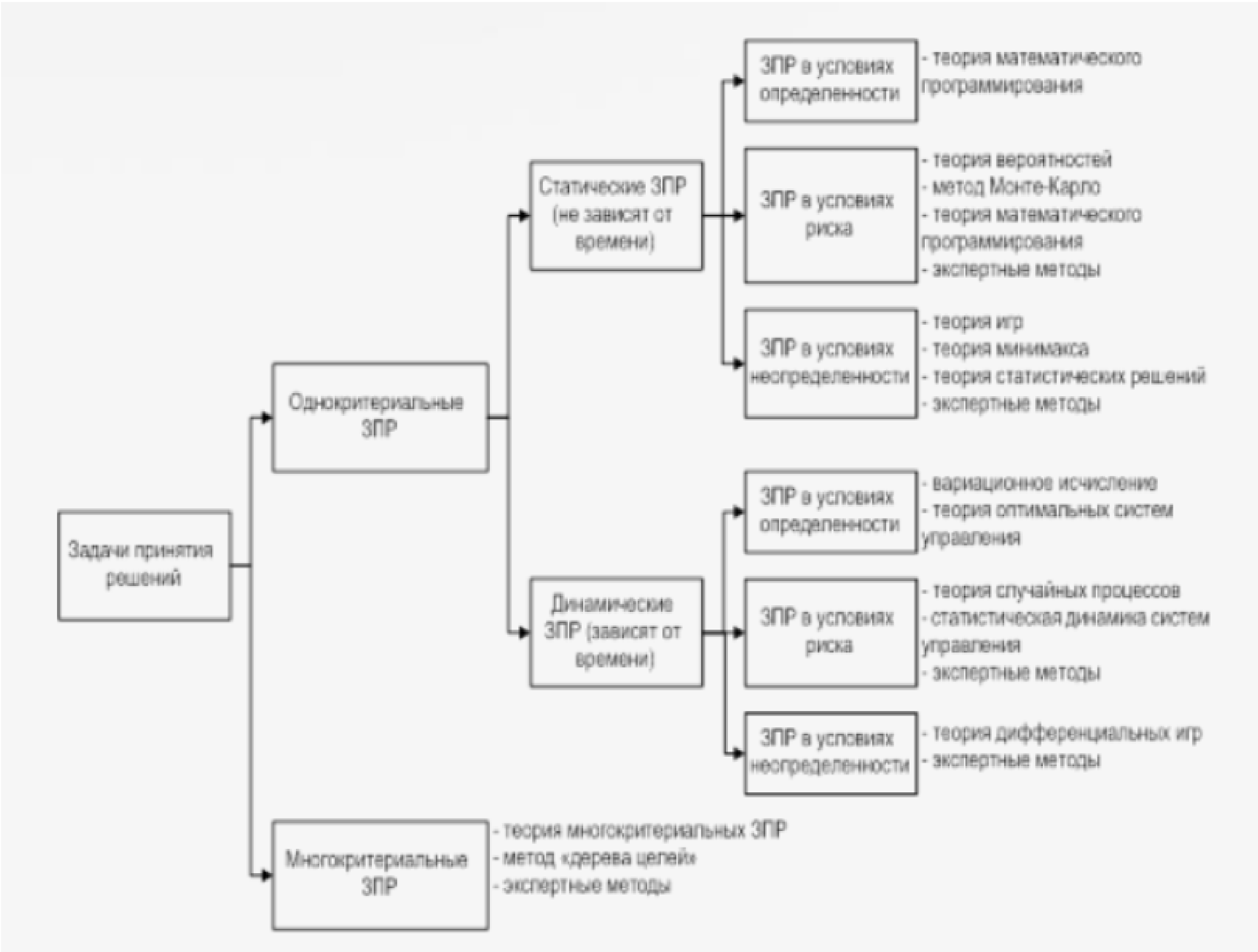


Рисунок 1.1. Классификация ЗПР

Математические модели принятия решений можно разбить на два больших класса: оптимизационные и теоретико-игровые. Оптимизационные модели уходят своими корнями в классический математический анализ. Теоретико-игровые модели начали исследоваться лишь в последние десятилетия, после выхода в 1944 году фундаментальной монографии "Теория игр и экономическое поведение" . Авторы работы Джон фон Нейман (венгеро-американский математик, физик 20 в.) и Оскар Моргенштейн (известный американский экономист 20в).

Наиболее общий подход к описанию задач принятия (ЗПР) решений формулируется "на языке систем".

В этом случае выделяется

– управляемая подсистема (объект управления), которая обладает состояниями (в математической модели с этой подсистемой связано множество возможных исходов A для состояний управляемой подсистемы).

– управляющая подсистема, которая может воздействовать на объект управления (в математической модели с этой подсистемой связано множество возможных альтернатив X)

– внешняя среда, от которой зависят состояния управляемой подсистемы (в математической модели с внешней средой связано множество состояний среды Y), при этом управляющая подсистема не может воздействовать на среду и, более того, она, как правило, не имеет полной информации о наличном состоянии среды.

Кроме множеств X,Y,A в математической модели принятия решения используется реализационная или целевая функция.

Целевой функцией называется зависимость, которая каждой паре вида (альтернатива, состояние среды) ставит в соответствие определяемый ею исход: A= f($X \times Y$).

Например, X – ассортимент предлагаемых предприятием услуг, Y – цены, спрос, диктуемые потребительским рынком, исход A – прибыль, от предоставления услуг, f – функция расчета прибыли.

На языке систем *принятием решения* называется выбор управляющей подсистемой конкретного управляющего воздействия (выбор допустимой альтернативы).

В зависимости от информации, которую имеет при принятии решения управляющая подсистема относительно состояния среды (по типу ситуации принятия решений), различают несколько *основных типов задач принятия решения* (рис. 1.2).

Рисунок 1.2

– Принятие решения в условиях определенности характеризуется тем, что состояние среды является фиксированным (неизменным), причем управляющая система «знает», в каком состоянии находится среда.

– Говорят, что принятие решения происходит в условиях риска, если управляющая подсистема имеет информацию стохастического характера о поведении среды (например, ей известно распределение вероятностей на множестве состояний среды).

– Если никакой дополнительной информации (кроме знания самого множества возможных состояний среды), управляющая подсистема не имеет, то говорят, что принятие решения происходит в условиях неопределенности.

– Принятие решения происходит в теоретико-игровых условиях, если среду можно трактовать как одну или несколько целенаправленных управляющих подсистем. В этом случае математическая модель принятия решения называется теоретико-игровой моделью.

Необходимо отметить, что перечисленные типы задач могут быть как однокритериальными, так и многокритериальными. В многокритериальных задачах аналитик при выборе альтернативы стремится улучшить значения двух и более показателей (критериев).

1.1 Принятие решений в условиях определенности. Однокритериальная оптимизация

При принятии решения в условиях определенности состояние среды является фиксированным и оно известно принимающему решение. В этом случае исход однозначно определяется выбором альтернативы, поэтому целевая функция $f(x)$ становится функцией только переменной x.

Оптимальной считается допустимая альтернатива $x^* \in X$, которая доставляет экстремум целевой функции: максимум (если функция прибыли) или минимум (если функция затрат). Таким образом, принятие решений связано с нахождением экстремумов или решением задачи оптимизации.

Экстремумы бывают двух типов: глобальные и локальные. *Глобальный экстремум* – это точка x*, в которой целевая функция принимает значение не большее, чем в любой допустимой точке из области, в которой рассматривается целевая функция. *Локальный экстремум* – это точка x*, в которой целевая функция принимает значение не большее, чем в любой достаточно "близкой" к x* допустимой точке. При решении задач принятия решений требуется находить глобальные экстремумы.

Множество альтернатив может быть конечным и бесконечным. В первом случае задача поиска экстремума разрешима. Во втором случае, если целевая функция непрерывна и задана на замкнутом ограниченном множестве, то глобальный экстремум всегда существует.

Методы нахождения глобальных экстремумов основываются на следующих положениях математического анализа:

– в точках локального экстремума дифференцируемой функции ее производная равна нулю, т.е. $f'(x^*)$=0 (для функции нескольких переменных все частные производные равны нулю;

– глобальный экстремум достигается в точках локального экстремума или на границе области, в которой рассматривается целевая функция.

В задачах принятия решений применяются также *методы условной оптимизации*, в которых, кроме целевой функции, задаются дополнительные условия (ограничения), связывающие переменные целевой функции.

Прикладные задачи принятия решений могут быть достаточно громоздкими для их аналитического решения, а во многих случаях аналитического решения может просто не быть. В настоящее время существует большое количество инструментальных средств для численного решения ЗПР на компьютере.

Основная задача линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) представляет собой частный случай задачи оптимизации при наличии ограничений, который характеризуется тем, что

– целевая функция является линейной;

– система ограничений, выделяющая допустимую область, представляет собой систему линейных неравенств.

Основная задача линейного программирования состоит в отыскании наибольшего (или наименьшего) значения *целевой функции*

$$f = c_o + c_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{1}$$

для неотрицательных значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ при выполнении системы ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Любой набор переменных, удовлетворяющий системе ограничений (2), при котором целевая функция имеет неотрицательное значение, называют *допустимым решением.* Допустимое решение, при котором значение целевой функции будет наибольшим или наименьшим, называется *оптимальным решением.*

К числу наиболее известных задач линейного программирования относят задачу планирования производства, задачу о смесях, транспортная задачу.

Постановка задачи планирования производства

Рассмотрим математическую постановку задачи планирования производства, которая сводится к решению системы (1)-(2).

Предприятие может производить продукцию *n* видов, используя *m* типов ресурсов. Известны:

a_{ij}, i=1,...,*m*, j=1,...,*n* – нормы расхода ресурса i-го типа на производство единицы продукции j-го вида;

b_i, i=1...,*m* – запасы ресурсов;

c_j, j=1,...,*n* – прибыль от реализации единицы продукции вида j-го вида.

Требуется найти объемы производства продукции каждого вида x_j, j=1,...,*n*, при которых будет достигнута максимальная суммарная прибыль f при условии сбалансированности плана производства продукции по каждому виду ресурсов.

Применительно к этой задаче функция (1) при $c_0 = 0$ определяет прибыль от реализации продукции всех видов в объемах $x_1, \ldots, x_n$. Левая часть каждого из неравенств системы неравенств (2) определяют расходы соответствующего ресурса на производство всех видов продукции в объемах $x_1, \ldots, x_n$. Сами неравенства являются условиями сбалансированности плана (по каждому ресурсу расходы не должны превышать имеющиеся запасы).

Для решения задачи используются графо-аналитический метод (при n<3) и симплекс-метод. Современные математические пакеты имеют встроенные процедуры для реализации симплекс-метода. В варианте контрольной работы требуется найти решение задачи планирования производства аналитически с помощью графо-аналитического метода, а также в средах Excel и Mathcad.

Графо-аналитический метод

В случаях n=2 и n=3 ЗЛП (1), (2) удобно решать геометрическим (графо-аналитическим) методом, который основан на том, что градиент

$$\bar{C} = grad\ f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} = \{C_1, .C_2, \ldots C_n\}$$

функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ указывает направление наибольшего возрастания целевой функции, а противоположный вектор $(-\bar{C})$ определяет направление наибыстрейшего убывания функции f. Так как область допустимых решений представляет собой выпуклый многоугольник (многогранник), то глобальный экстремум, если он достижим, всегда достигается на границе области.

Алгоритм графо-аналитического метода

– По ограничениям изобразить многоугольник допустимых решений.

– Изобразить grad(f), показывающий направление наибольшего возрастания целевой функции f .

– Изобразить опорную прямую (линию постоянной прибыли или затрат), перпендикулярную градиенту, вдоль которой целевая функция постоянна.

– Двигая опорную прямую вправо, найти визуально то ее положение, при котором достигается max целевой функции (максимум достигается в вершинах многоугольника или на его границе).

– Найти аналитически координаты вершины многоугольника, в которой достигается max, как координаты точки пересечения прямых.

– Вычислить значение целевой функции в точке оптимальности.

Пример. Для изготовления различных изделий A и B используются три вида сырья. На производство единицы изделия A требуется затратить сырья первого вида a_1 кг, сырья второго вида a_2 кг, сырья третьего вида a_3 кг. На производство единицы изделия B требуется затратить сырья первого вида b_1 кг, сырья второго вида b_2 кг, сырья третьего вида b_3 кг.

Производство обеспечено сырьём первого вида в количестве p_1 кг, сырьём второго вида – в количестве p_2 кг, сырьём третьего вида – в количестве p_3 кг. Прибыль от реализации готового изделия A составляет α руб., а изделия B – β руб.

Требуется составить план x_1^* и x_1^* объемов производства изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Исходные данные : $a_1 = 10, a_2 = 4, a_3 = 5; \quad b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 15;$
$p_1 = 370,\ p_2 = 184,\ p_3 = 400, \quad \alpha = 4, \beta = 6.$

Решить задачу геометрическим (графо-аналитическим) методом.

Решение. Решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения целевой функции функции $f = \alpha x_1 + \beta x_2$ при следующих ограничениях на переменные:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 \le p_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 \le p_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 \le p_3. \end{cases}$$

Подставим числовые значения в целевую функцию и ограничения:

$$f = 4x_1 + 6x_2 \to \max,\ 10x_1 + 3x_2 \le 370,\ 4x_1 + 4x_2 \le 184,\ 5x_1 + 15x_2 \le 400.$$

Для удобства построения запишем систему неравенств в следующем виде:

$$\frac{x_1}{370/10} + \frac{x_2}{370/3} \le 1, \quad \frac{x_1}{184/4} + \frac{x_2}{184/4} \le 1, \quad \frac{x_1}{400/5} + \frac{x_2}{400/15} \le 1$$

или

$$\frac{x_1}{37} + \frac{x_2}{123{,}3} \le 1, \quad \frac{x_1}{46} + \frac{x_2}{46} \le 1, \quad \frac{x_1}{80} + \frac{x_2}{26{,}7} \le 1.$$

Числа в знаменателях дробей показывают величины отрезков, отсекаемых на соответствующих координатных осях прямыми, образующими границу области допустимых решений.

Построим область допустимых решений, учитывая $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$. Получается многоугольник OMNPQ (рис. 1.3).

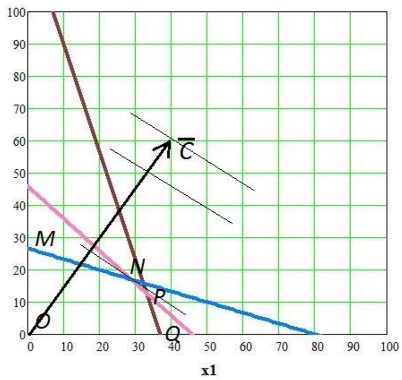


Рисунок 1.3

Построим вектор $\overline{C}=\{40;60\}$, коллинеарный вектору $grad\ f=\left(\frac{\partial f}{dx_1},\frac{\partial f}{dx_2}\right)=(4{,}6)$. Вектор $grad\ f$ показывает направление наибольшей скорости изменения целевой функции f. Линии уровня, вдоль которых целевая функция принимает одно и то же значение, перпендикулярны вектору $\overline{C}=\{40;60\}$. На рисунке показано несколько таких линий.

Наибольшее значение целевой функции достигается на опорной прямой (линии уровня), в точке последней «встречи» линии уровня с многоугольником допустимых решений OMNPQ. Это будет точка N(29;17). Координаты точки N найдены в результате решения системы двух линейных уравнений (уравнений прямых MN и NP).

Вычислим наибольшее значение целевой функции как значение функции в точке N:

$$f_{\max}=f(N)=4\cdot 29+6\cdot 17=218.$$

Значит, оптимальный план x_1^*=29, x_2^*=17.

Симплекс-метод

При n>=4 геометрический метод решения задачи линейного программирования неприменим. В этом случае пользуются аналитическим методом, называемым симплекс-методом, который состоит в специальном переборе допустимых решений специального вида, так называемых *базисных решений* (с геометрической точки зрения, базисные решения соответствуют вершинам многоугольника допустимых решений), до тех пор, пока не будет найдено *оптимальное решение,* при котором целевая функция достигает наибольшего (или наименьшего) значения. Дополнительно алгоритм симплекс-метода можно изучить, используя информационные ресурсы, например, [2]. В контрольной работе (задание 1) требуется найти решение задачи планирования производства симплекс-методом с использованием готовых программ (встроенного инструментария в Excel и Mathcad).

1.2 Принятие решения в условиях определенности. Многокритериальная оптимизация

В большинстве практических задач принятия решения исходы (в качестве которых выступают реальные объекты и явления), оцениваются, как правило, не по одному, а по нескольким критериям. Скажем, при оценке технического изделия основными критериями (показателями) оценки служат его технические характеристики, а также такие качества, как надежность, эргономичность, внешний вид. При выборе кандидата на должность важнейшими критериями оценки являются квалификация, образование, эрудиция, возраст, коммуникабельность и т.п. В экономических задачах основными критериями служат экономическая эффективность и стоимость, при этом каждый из этих критериев, в свою очередь, может быть подразделен на более частные критерии.

Если исходы оцениваются по нескольким критериям, то такая задача принятия решений называется многокритериальной. Основная сложность логического анализа многокритериальных задач состоит в том, что в них, в отличие от "обычных" (однокритериальных) задач появляется эффект несравнимости исходов. Скажем, если альтернативы оцениваются по двум критериям, несводимым один к другому, и альтернатива X_1 лучше альтернативы X_2 по первому критерию, но хуже по второму критерию, то альтернативы X_1 и X_2 будут несравнимыми между собой. Несравнимость альтернатив является формой неопределенности, которая, в отличие от стратегической неопределенности, вызванной воздействием среды на объект управления, связана со стремлением принимающего решение "достичь противоречивых целей" и может быть названа ценностной неопределенностью. Многокритериальные задачи в общем случае не имеют единственного оптимального решения. Выбор, осуществляемый между несравнимыми альтернативами, часто является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание многокритериальной оптимизации.

Критерий называется *позитивным*, если принимающий решение стремится к его увеличению, и *негативным*, если к его уменьшению.

Для решения многокритериальных задач применяются разные подходы:

- сведение многокритериальных задач к однокритериальным;
- использование принципа доминирования по Парето;
- использование экспертных оценок.

Решение многокритериальных задач путем сведения к однокритериальным

Будем считать рассматриваемые критерии позитивными. Рассмотрим наиболее часто используемые методы.

Субоптимизация. Метод главного критерия: выбрать в качестве главного один из критериев, например, f1, для остальных критериев вводятся ограничения снизу.

Лексикографическая оптимизация. Основана на упорядочении критериев по их относительной важности. На первом шаге отбираются те альтернативы, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если такая альтернатива единственна, то она и считается оптимальной. Если же таких альтернатив несколько, то среди них отбираются те, которые имеют максимальную оценку по следующему за важнейшим критерию и т.д. В результате такой процедуры всегда остается (по крайней мере, в случае конечного множества альтернатив) единственная альтернатива – она и будет оптимальной.

Построение обобщенного критерия. Принципиальная сложность в построении обобщенного критерия заключена в том, что приходится "соотносить" друг с другом критерии, характеризующие объект с разных сторон; эти критерии имеют подчас совершенно различную природу, в силу чего оценки по ним даются в разных шкалах. Построение итоговой ("интегральной") оценки невозможно без соизмерения критериев между собой, что требует большой дополнительной информации об относительной важности этих критериев для принимающего решение. Приведем некоторые варианты построения обобщенного критерия

a) Метод линейной свертки:

$\mathbf{f(x) = \alpha 1 \cdot f1(x)} + \alpha 2 \cdot \mathbf{f2(x)} + \mathbf{\alpha 3 \cdot f3(x) \to max}$, где $\mathbf{\alpha 1} + \alpha 2 + \mathbf{\alpha 3 = 1}$.

Коэффициенты целевой функции являются показателями относительной важности критериев.

b) Методы максиминной свертки:

$$\mathbf{f(x) = min\big(f1(x), f2(x), f3(x)\big) \to max}$$

c) Метод мультипликативной свертки: $\mathbf{f(x) = f1(x)f2(x)f3(x) \to max.}$

Решение многокритериальных задач на основе паретовского множества

Обозначим $X = \{X1, X2, \dots \dots . Xn\}$– множество альтернатив. Пусть количество рассматриваемых альтернатив равно n, а количество критериев (факторов), по которым альтернативы сравниваются, равно m. С геометрической точки зрения альтернативы являются точками m – мерного пространства. Значения критериев для каждой i-ой альтернативы определяют координаты точки в m-мерном пространстве, соответствующей этой альтернативе, или ее векторную оценку $\bar{F}(X\mathrm{i}) = (F_1(Xi), \mathrm{F}_2(Xi), \dots \mathrm{F}_m(Xi))$.

Рассмотрим две любые альтернативы $Xi, Xj \subset X$. Говорят, что альтернатива Xi *доминирует* по Парето над альтернативой Xj, пишут Xi>Xj, если по всем критериям альтернатива Xi не хуже, и хотя бы по одному критерию лучше, чем альтернатива Xj. В этом случае альтернатива Xj является *доминируемой* альтернативой Xi, а альтернатива Xi – *доминирующей* над Xj.

Альтернатива X^* называется *оптимальной по Парето* (паретовской) в множестве X, если в этом множестве не существует других альтернатив, доминирующих по Парето над альтернативой X^*.

В общем случае паретовских точек несколько. В любом случае оптимальные решения находятся среди паретовских альтернатив. Чтобы сузить паретовское множество, если их большое количество, используются либо мнения эксперта, либо вводятся дополнительные ограничения на критерии.

Пример. Сравниваются 5 альтернатив (n=5) по двум критериям (m=2). Значения критериев приведены на рис. 1.4. Альтернатива 5 – доминирующая только над 1. Альтернатива 4 – доминирующая только над 2. Альтернатива 3 не является доминируемой другими и не является доминирующей над другими альтернативами. Следовательно, паретовское множество составляют альтернативы 3,4,5.

	позитивные критерии					
номера альтернатив	значения критерия f1	номера альтернатив	значения критерия f2			
1	13	1	12	3 не имеет доминируемых		
2	11	2	13	5>1		
3	15	3	11	4>2		
4	12	4	15			
5	14	5	12			
	Паретовские: 3,5,4					

Рисунок 1.4

Рассмотрим геометрический смысл паретовского множества в двумерном пространстве, изобразив все альтернативы (точки) множества X по их кооординатам (рис 1.5). Очевидно, при позитивных критериях паретовские точки находятся на границе множества точек X со стороны верхнего правого угла координатной плоскости.

Рисунок 1.5

Алгоритм нахождения паретовского множества

Рассмотрим алгоритм нахождения паретовского множества на конечном множестве X в случае позитивных критериев.

– В столбце каждого критерия сортировать точки по убыванию (ухудшению) значений критерия.

– Выбрать первую точку из столбца любого критерия (для определенности можно выбрать первый критерий), т.е. точку с наибольшим значением критерия. Если имеется несколько точек с одинаковым наибольшим значением выбранного критерия, и среди них есть доминирующая над другими, то ее надо в таблице поставить выше остальных.

– В остальных столбцах найти эту точку. Отметить ее, найти доминируемые ею точки (точки, в которых значения каждого критерия не больше, чем в этой точке и, по крайней мере, по одному критерию значения строго меньше).

– Исключить найденные доминируемые точки из всех столбцов, если такие точки есть. Отмеченную доминирующую точку зафиксировать как паретовскую и не рассматривать в дальнейшем.

– Выбрать в первом столбце следующую точку с наибольшим значением критерия, если возможно (если имеется несколько таких точек, и среди них есть доминирующая, то ее надо поставить выше остальных). Далее перейти на пункт 3, в противном случае найдено паретовское множество.

В контрольной работе (задание 2) требуется, используя описанный алгоритм, найти паретовское множество точек, используя сортировку в Excel.

Метод анализа иерархий

Еще один подход решения многокритериальных задач, использующий экспертные оценки, дает Метод анализа иерархий (МАИ). Метод разработан американским математиком Томасом Саати в 80-е годы 20-го века [3]. В настоящее время существуют различные модификации метода и программные алгоритмы для его реализации. МАИ – математический инструмент системного подхода к сложным проблемам принятия решений. Метод применяется в ситуациях, когда альтернативы сравниваются по большому количеству факторов, когда задача плохо формализуется и более адекватно подходят человеческие опыт и интуиция, нежели сложные математические расчеты. Метод дает удобные средства учета экспертной информации. МАИ используется во всем мире для принятия решений в разных областях: от управления на межгосударственном уровне до решения отраслевых и частных проблем в бизнесе, промышленности, здравоохранении и образовании. Для компьютерной поддержки МАИ существуют программные продукты, разработанные различными компаниями.

Этапы принятия решения на основе МАИ

1 этап. Построение графа или таблицы иерархической структуры (рис. 1.6), которая включает цель, альтернативы и критерии (факторы), влияющие на выбор альтернативы. Таблица иерархической структуры подразумевает численное оценивание каждой альтернативы по каждому критерию

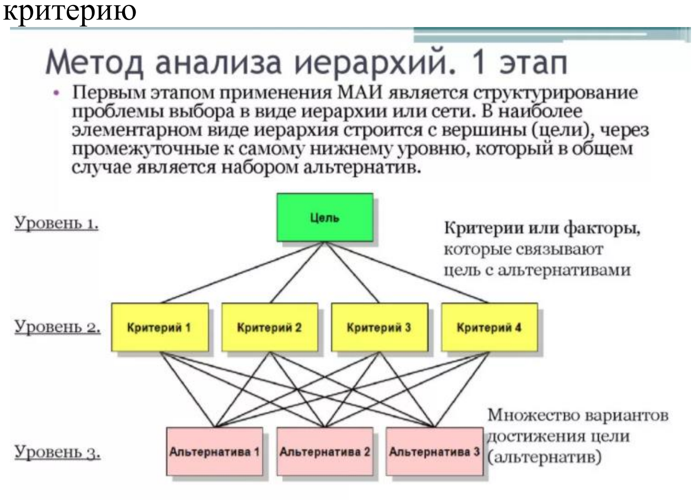


Рисунок 1.6

2 Этап. определение локальных безразмерных приоритетов объектов (критериев и альтернатив) построенной иерархической структуры (рис. 1.7), с помощью процедуры парных сравнений. Безразмерные приоритеты позволяют обоснованно сравнивать разнородные объекты, что является отличительной особенностью МАИ. Приоритеты критериев будем называть весами, а приоритеты альтернатив по каждому критерию будем называть оценками.

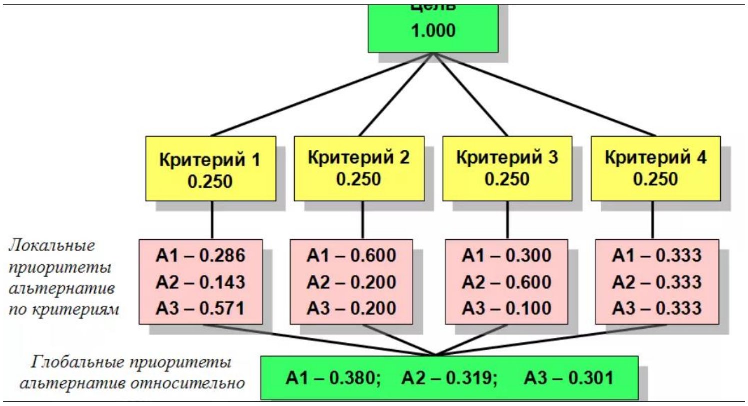


Рисунок 1.7

3 Этап. Определяются глобальные приоритеты (рейтинги) альтернатив как линейные свертки оценок альтернатив и весов факторов, в результате которой вычисляются рейтинги альтернативных решений относительно главной цели. Лучшей считается альтернатива с максимальным значением глобального приоритета.

Матрица парных сравнений. Метод расчета весов критериев, оценок и глобальных приоритетов альтернатив

Для проведения субъективных парных сравнений Т. Саати была предложена шкала относительной важности или шкала предпочтений, которая дает рекомендации для проставления рангов матрицы парных сравнений (рис 1.8).

Шкала предпочтений

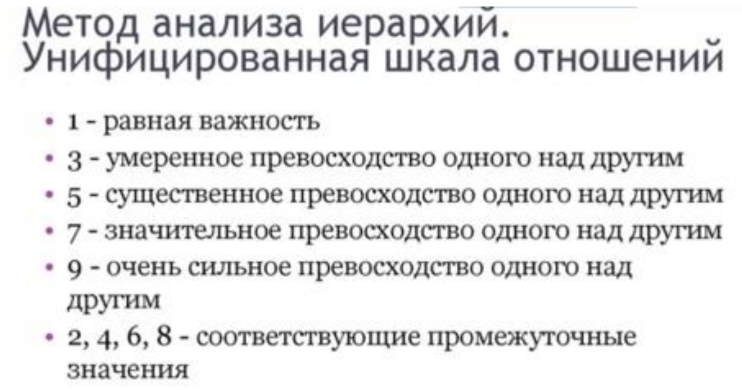


Рисунок 1.8

Нахождение весов критериев

– Заполнить таблицу (матрицу) парных сравнений критериев (составляется одна таблица размерности m*m, где m – количество критериев). В заголовках таблицы, расположить критерии (факторы) по мере уменьшения их значимости.

– Расставить ранги: по главной диагонали «1», выше главной диагонали, опираясь на шкалу предпочтений, при этом для обеспечения согласованности сравнений ранги должны не убывать слева направо и не возрастать сверху вниз.

– Вычислить ранги ниже главной диагонали как обратные величины $r_{ij} = \frac{1}{r_{ji}}$ и записать их в соответствующие клетки.

– Найти среднее геометрическое рангов в каждой строке.

– Найти веса $w_j, j = \overline{1,m}$ критериев как среднее геометрическое чисел, стоящих в строках матрицы рангов, деленное на сумму средних геометрических по всем критериям (сумма весов должна быть равна 1).

Пример заполнения таблицы показан ниже при разборе варианта контрольной работы.

Расчет отношения согласованности

Согласованность матрицы парных сравнений проверяется с помощью отношения согласованности. Порядок расчетов:

– Рассчитать показатель согласованности ПС как сумму произведений весов критериев (факторов) на сумму рангов в столбцах таблицы рангов.

– Рассчитать индекс согласованности (ИС) как частное от деления разности ПС и количества факторов на разность количества факторов и единицы: $\text{ИС} = \frac{\text{ПС}-m}{m-1}$.

– Рассчитать отношение согласованности (ОС) как частное от деления ИС на случайный индекс (СИ): $\text{ОС} = \frac{\text{ИС}}{\text{СИ}}$. Случайный индекс зависит от количества факторов и выбирается из таблицы на рис.1.9.

Рассчитанное отношение согласованности должно быть меньше 0,1, в противном случае необходимо проверить правильность расстановки рангов.

Количество факторов	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Случайный индекс (СИ)	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Рисунок 1.9

Нахождение локальных приоритетов (оценок)альтернатив по каждому критерию

– Заполнить таблицу (матрицу) парных сравнений альтернатив (составляется m таблиц размерности n*n, где n – количество альтернатив). В заголовках таблицы альтернативы располагать по мере уменьшения их значимости (для каждого критерия это будет разный порядок).

– Расставить ранги: по главной диагонали «1», выше главной диагонали, опираясь на шкалу предпочтений, при этом для обеспечения согласованности сравнений ранги должны не убывать слева направо и не возрастать сверху вниз.

– Вычислить ранги ниже главной диагонали как обратные величины $r_{ij} = \frac{1}{r_{ji}}$ и записать их в соответствующие клетки.

– Найти среднее геометрическое рангов в каждой строке.

– Найти оценки $o_{ij}, i = \overline{1,n}$ альтернатив как среднее геометрическое чисел, стоящих в строках матрицы рангов, деленное на сумму средних геометрических по всем альтернативам (сумма оценок должна быть равна 1).

Оценки альтернатив вычисляются по каждому j-му критерию, $j = \overline{1,m}$ (составляется m таблиц). Пример заполнения таблиц показан ниже при разборе варианта контрольной работы.

Нахождение глобальных приоритетов альтернатив (рейтингов)

Составить таблицу размерности m на n (строки соответствуют критериям, а столбцы альтернитивам). Для расчета рейтингов (глобальных приоритетов) использовать формулу линейной свертки

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} o_{ij} w_j.$$

Выбрать наилучшую альтернативу согласно большему рейтингу.

1.3 Принятие решения в условиях неопределенности

Матрица выигрышей

Математическая модель принятия решения в условиях неопределенности может быть задана в виде тройки объектов X, Y, f, где X – множество допустимых альтернатив, Y – множество состояний среды, f(x,y) – целевая функция, которая определяет ту полезность, которую получает принимающий решение, если он выбирает альтернативу $x \in X$, и при этом среда принимает состояние $y \in Y$.

Пример.

Инвестор должен выбрать проект аэродрома. Всего имеется n типов проектов: X1, X2, X3, …..,Xn. Среда – это то, что определяет при каждой фиксированной альтернативе появление конкретного исхода (результата). Эффективность выбора проекта и дальнейшей его эксплуатации зависит от ряда неопределенных факторов, например, курса валют, цен на стройматериалы, транспортных расходов, погодных условий, спроса на перевозки, инфраструктуры региона и т.п. Предположим, что можно выделить m вариантов сочетаний данных факторов – они выступают в качестве состояний среды Y1, Y2, Y3, …,Ym, которые заранее неизвестны.

Целевая функция f(x,y) – это экономическая эффективность от выбора проекта аэродрома, которая определяется в данном случае как процент прироста дохода в течение одного года его эксплуатации в сопоставлении с капитальными затратами. Экономическая эффективность зависит как от типа проекта, так и от состояния среды, и может быть задана аналитически или таблично в виде матрицы выигрышей. Второй случай применяется, если множества альтернатив и состояний среды конечны.

Обозначим матрицу выигрышей f (Xi, Yj) $= a_i^j,\ i = \overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$,

где $\boldsymbol{a_i^j}$ - выигрыш в случае принятия i-ой альтернативы, если среда окажется в j-ом состоянии (рис 1.10).

	$\boldsymbol{Y_1}$	$\boldsymbol{Y_2}$	$\boldsymbol{Y_3}$	**…**	$\boldsymbol{Y_m}$
$\boldsymbol{X_1}$	a_1^1	a_1^2	a_1^3		a_1^m
$\boldsymbol{X_2}$	a_2^1	a_2^2	a_2^3		a_2^m
$\boldsymbol{X_3}$	a_3^1	a_3^2	a_3^3		a_3^m
…					
$\boldsymbol{X_n}$	a_n^1	a_n^2	a_n^3		a_n^m

Рисунок 1.10

Принцип доминирования

Основная сложность при принятии решения в условиях неопределенности состоит в том, что, выбирая одну из допустимых альтернатив, принимающий решение не знает имеющегося состояния среды; в то же время получающийся исход зависит от того, в каком состоянии находится среда. Говоря формально, целевая функция f (x, y) является функцией двух аргументов; принимающий решение должен выбирать значение аргумента x $\in X$, не зная значения аргумента y $\in Y$.

Выбор какой альтернативы здесь следует считать оптимальным? Чтобы ответить на этот вопрос, надо иметь некоторый способ сравнения двух альтернатив. Наиболее простой и естественный принцип, по которому можно сравнить две альтернативы – это принцип доминирования (аналог паретовского множества). Принцип доминирования состоит в отбрасывании доминируемых альтернатив.

Обозначим $X = \{X1, X2, \dots \dots . Xn\}$ – множество альтернатив. Пусть количество рассматриваемых альтернатив равно n, а количество возможных состояний среды равно m. Рассмотрим две произвольные альтернативы $Xi, Xj \subset X$. Говорят, что альтернатива Xi является *доминирующей* над альтернативой Xj, (Xi>Xj) если при любом состоянии среды Yj альтернатива Xi не хуже, и хотя бы при одном состоянии среды лучше, чем альтернатива Xj. В этом случае альтернатива Xj является доминируемой альтернативой Ai.

Замечание. Сравнение альтернатив по отношению доминирования аналогично сравнению исходов многокритериальной ЗПР по Парето–доминированию. Основное различие здесь в интерпретации: для ЗПР в условиях неопределенности номера столбцов соответствуют состояниям среды, а для многокритериальной ЗПР они соответствуют критериям

Использование принципа доминирования зачастую позволяет лишь уменьшить количество альтернатив, а для дальнейшего принятия решения используются методы, приведенные в следующем параграфе.

Критерии Лапласа, Вальда, Гурвица, Сэвиджа

Основной метод, позволяющий найти оптимальную альтернативу в ЗПР в условиях неопределенности, состоит в следующем: формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать каждой альтернативе единую числовую оценку.

Пусть количество альтернатив n. Количество состояний среды m. Известна матрица выигрышей $A = \left(a_i^j\right)$, где a_i^j - выигрыш в случае принятия i-ой альтернативы при j-ом состоянии среды.

Критерий Лапласа основан на гипотезе равновозможности (равновероятности) и содержательно может быть сформулирован в виде: «Поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, надо считать их равновероятными». При принятии данной гипотезы в качестве оценки i-ой альтернативы выступает среднеарифметическое выигрышей, стоящих в i -ой строке матрицы выигрышей. Таким образом, оценка альтернативы по критерию Лапласа имеет вид:

$$L(i) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^j.$$

Оптимальной по критерию Лапласа является та альтернатива $i*$, которая максимизирует оценку $L(i)$, т.е.

$$L(i^*) = \max_{\mathrm{i}} L(i).$$

Критерий Вальда «критерий крайнего пессимизма» основан на гипотезе антагонизма, которая может быть сформулирована в виде: «*При выборе решения надо рассчитывать на самый худший возможный вариант*». При принятии данной гипотезы оценкой альтернативы i служит число $W(i) = \min_j a_i^j$ и сравнение любых двух альтернатив производится по величине критерия W. Оптимальной в этом случае будет альтернатива, максимизирующая функцию W, то есть та альтернатива i^*, для которой выполняется

$$W(i^*) = \max_i W(i) = \max_i \min_j a_i^j.$$

Альтернатива i^* называется *максиминной*, а число $\max_i \min_j a_i^j$ называется *максимином*. Принцип оптимальности, по которому оптимальной альтернативой считается *максиминная* альтернатива, называется *принципом максимина*.

Критерий Гурвица связан с введением показателя $0 \le \alpha \le 1$, называемого *показателем пессимизма*. Гипотеза о поведении среды состоит в этом случае в том, что при любом выборе альтернативы наихудший для принимающего решения вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший – с вероятностью $1-\alpha$. Тогда оценкой альтернативы i является взвешенная сумма

$$H_a(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1-\alpha) \max_j a_i^j.$$

Оптимальной в этом случае будет альтернатива, максимизирующая функцию H_a, то есть та альтернатива i^*, для которой выполняется

$$H_a(i^*) = \max_i H_a(i).$$

При α=1 данный критерий превращается в «критерий крайнего пессимизма» (то есть в критерий Вальда), а при α = 0 – в «критерий крайнего оптимизма».

Критерий Сэвиджа основан на преобразовании первоначальной матрицы выигрышей (a_i^j) в матрицу (r_i^j) – *матрицу рисков* (по другому – *матрицу сожалений*). Речь идет о риске потерять максимальный выигрыш.

Риском при выборе альтернативы i в состоянии j называется число

$$r_i^j = \beta^j - a_i^j, \text{ где } \beta^j = \max_i a_i^j.$$

Содержательно r_i^j интерпретируется как «мера сожаления», возникающая от незнания истинного состояния среды. Если бы принимающий решение знал истинное состояние среды j, он выбрал бы альтернативу, дающую максимальный возможный выигрыш в состоянии j и получил бы в результате выигрыш $\beta^j = \max_i a_i^j$ вместо полученного им выигрыша a_i^j.

Для критерия Сэвиджа оптимальной считается альтернатива, минимизирующая максимальный риск (то есть здесь используется минимаксный критерий для матрицы сожалений):

$$C(i^*) = \min_i \max_j r_i^j.$$

1.4 Принятие решения в условиях риска

Критерии максимального ожидаемого выигрыша и минимального риска

Изучение математической модели ЗПР в условиях риска предполагает, кроме задания целевой функции, задана некоторая дополнительная информация о вероятностях состояний среды.

Если множество состояний среды Y конечно, $Y = \{1, . . . ,m\}$, то вероятностная мера на нем может быть задана вероятностным вектором, то есть вектором

$$p = (p_1, . . . , p_m), \text{ где } p_j \geq 0 \text{ и } \sum_j p_j = 1.$$

Выбирая альтернативу i, принимающий решение знает, что он получит один из выигрышей $a^1{}_i, . . . , a^m{}_i$ с вероятностями $p_1, . . . , p_m$, соответственно. Таким образом, исходом для принимающего решение при выборе им альтернативы i будет являться случайная величина, заданная законом распределения

$$\xi_i = \begin{bmatrix} a_i^1 & \dots & a_i^m \\ p_1 & \dots & p_m \end{bmatrix}.$$

Следовательно, сравнение двух альтернатив i_1 и i_2 сводится здесь к сравнению соответствующих им случайных величин ξi_1 и ξi_2. Характеристиками случайных величин являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание $M[\xi_i]$ в теории вероятности - это среднее значение случайной величины ξ_i, определяемое для дискретной случайной величины по формуле:.

$$M_i = M[\xi_i] = a_i^1 \cdot p_1 + a_i^2 \cdot p_2 + ... + a_i^m \cdot p_2.$$

Принятие решения в условиях риска сводится к сравнению между собой случайных величин. Если для задачи принятия решения в условиях риска в качестве критерия для сравнения альтернатив взять математическое ожидание соответствующей случайной величины (ожидаемый выигрыш), то оптимальной следует считать альтернативу i^*, максимизирующую ожидаемый выигрыш:

$$M(i^*) = \max_i M(\xi i).$$

Как известно из теории вероятностей, математическое ожидание $M\xi$ случайной величины ξ представляет собой число, к которому приближается среднее значение этой случайной величины при большом числе испытаний. Таким образом, в игре с природой ориентация на математическое ожидание выигрыша есть фактически ориентация на средний выигрыш, который получится при многократном повторении этой игры (в предположении, что условия игры не изменятся). Разумеется, если в действительности игра повторяется многократно, то критерий среднего выигрыша (скажем, в экономических задачах – средней прибыли) можно считать оправданным.

Дисперсия случайной величины – мера разброса данной случайной величины или среднее значение квадрата отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания:

$$D[\xi_i] = M\left[(\xi_i - M[\xi_i])^2\right] \equiv M\left[\xi_i^{\,2}\right] - M[\xi_i]^2.$$

Через дисперсию случайной величины выражается ее среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\xi i} = \sigma[\xi_i] = \sqrt{D[\xi_i]}$.

Для ЗПР в условиях риска в качестве критерия принимается среднеквадратическое отклонение $\sigma_{\xi i}$ – показатель риска потерять ожидаемый выигрыш. Оптимальной следует считать альтернативу i^*, минимизирующая риск

$$\sigma_{i^*} = \min_i \sigma_{\xi i}.$$

Чем меньше $\sigma_{\xi i}$, тем меньше отклонения возможных выигрышей от ожидаемого выигрыша и тем меньше риск.

Обобщенный критерий

Обобщенный критерий строится в виде «соединения» указанных двух критериев:

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma,$$

где λ – некоторая постоянная. Оценка случайной величины с помощью обобщенного критерия при $\lambda > 0$ будет меньше, чем ее среднее значение, что является характерным для осторожного человека, то есть человека, не склонного к риску. Напротив, при $\lambda < 0$ оценка будет больше, чем ее среднее значение, что характеризует человека, склонного к риску. Наконец, при $\lambda = 0$ оценка случайной величины совпадает с ее средним значением – это характеризует человека, безразличного к риску.

Параметр $\lambda>0$ является мерой несклонности к риску. Чем больше λ, тем больше осторожность принимающего решение (несклонность к риску). При этом возникает вопрос, как выбрать значение λ. Для этого определяется паретовское множество альтернатив по двум критериям $\max_i M_{\xi i}$ и $\min_i \sigma_{\xi i}$, вообще говоря, находящихся в противоречии. Далее определяется пороговые значения λ, соответствующих паретовским точкам. Вне этого диапазона, но при условии $\lambda>0$ нужно выбирать значения λ в зависимости от меры несклонности к риску. Подробнее о выборе параметра λ можно прочесть в [1].

2 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ»

1. Основные определения и понятия теории оптимизации и принятия решения.
2. Формальная модель задачи принятия решения на языке систем.
3. Классификация задач принятия решений по используемым методам решения.
4. Основные типы задач принятия решений в зависимости от ситуации принятия

решений.

5. Принятие решений в условиях определенности на основе однокритериальной оптимизации. Условная оптимизация.
6. Задачи линейного программирования (ЗЛП). Постановка основной задачи линейного программирования.
7. Постановка задачи планирования производства.
8. Графо-аналитический метод решения ЗЛП.
9. Каноническая форма ЗЛП.
10. Симплекс метод, его алгоритм.
11. Инструментальные средства решения ЗЛП.
12. Многокритериальные задачи принятия решений в условиях определенности. Методы их решения.
13. Методы сведения многокритериальных задач к однокритериальным.
14. Решение многокритериальных задач на основе паретовского множества.
15. Алгоритм нахождения паретовского множества.
16. Этапы принятия решения на основе Метода анализа иерархий (МАИ).
17. Алгоритм заполнения матрицы парных сравнений.
18. Алгоритм нахождения локальных (весов и оценок) приоритетов в МАИ.
19. Алгоритм нахождения глобальных приоритетов в МАИ и выбор оптимальной альтернативы.
20. Задачи принятия решений в условиях неопределенности. Матрица выигрышей.
21. Принцип доминирования при решении задач принятия решений в условиях неопределенности.
22. Критерии Лапласа, Вальда.
23. Критерии Гурвица, Сэвиджа.
24. Задачи принятия решений в условиях риска.
25. Критерии принятия решений в условиях риска.

3 ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И ТРЕБОВАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

Контрольная работа включает 5 заданий по разным темам дисциплины. Номером варианта служит число n, равное сумме двух последних цифр зачетной книжки студента, если это не ноль. Если же две последние цифры номера зачетной книжки студента нули, то следует полагать n=19.

Контрольная работа должна быть оформлена в печатном виде согласно требований к оформлению письменных работ обучающихся в ДГТУ, в соответствии со своим вариантом и должна содержать:

- титульный лист;
- формулировку заданий и их выполнение;
- по каждому заданию подробное описание проводимых расчетов и исследований с указанием используемых формул, алгоритмов, методов и инструментальных средств;
- результаты и выводы по каждому заданию;
- перечень используемых источников литературы и интернет-источников.

Задание 1. *Задача планирования производства как задача линейного программирования (ЗПР в условиях определенности, однокритериальности при наличии ограничений)*

Постановка задачи. Для изготовления изделий A и B используются три вида сырья. На производство единицы изделия A требуется затратить сырья первого вида a_1 кг, сырья второго вида a_2 кг, сырья третьего вида a_3 кг. На производство единицы изделия B требуется затратить сырья первого вида b_1 кг, сырья второго вида b_2 кг, сырья третьего вида b_3 кг.

Производство обеспечено сырьём первого вида в количестве p_1 кг, сырьём второго вида – в количестве p_2 кг, сырьём третьего вида – в количестве p_3 кг. Прибыль от реализации готового изделия A составляет α руб., а изделия B – β руб.

Требуется составить оптимальный план x_1^* и x_2^* объемов производства изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Решить тремя методами

– графо-аналитическим методом;
– с помощью инструмента «Поиск решения» в Excel;
– используя функцию Maximize в Mathcad.

Исходные данные по вариантам

№ Вар-та	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	p_1	p_2	p_3	α	β
1	12	4	3	3	5	14	264	136	266	6	4
2	15	12	3	2	6	12	300	306	360	9	6
3	14	14	6	6	8	12	350	392	408	10	5
4	16	9	5	4	9	12	400	333	360	9	12
5	8	4	3	6	9	9	192	144	135	8	9
6	14	4	2	4	4	12	252	120	240	30	40
7	15	5	4	4	3	8	225	100	192	6	8
8	16	3	6	2	2	15	304	83	375	10	12
9	11	4	5	3	6	14	220	132	280	5	4
10	15	10	3	3	5	10	300	320	340	9	7
11	15	14	7	6	9	12	330	378	420	8	5
12	14	10	5	4	8	11	280	320	330	9	11
13	12	5	4	6	10	9	270	150	180	7	9
14	15	3	5	3	2	14	270	84	420	10	14
15	13	3	3	5	4	12	265	140	260	7	6
16	10	5	3	3	5	14	260	136	266	6	4
17	15	11	3	2	6	12	320	306	360	9	6
18	13	13	6	6	8	12	330	392	408	10	5
19	16	10	5	4	9	12	420	333	360	9	10
20	8	5	3	6	9	9	190	144	135	8	9

Задание 2. *Задача принятие решений на основе паретовского множества (ЗПР в условиях определенности и многокритериальности).*

Постановка задачи. Качество работы предприятия определяется m критериями f1,f2, …fm. Наилучшими значениями критериев являются их максимальные значения. В результате исследований найдены значения критериев для n случаев. Назовем каждый из случаев альтернативой. Используя общий алгоритм, найти среди них парето-оптимальные альтернативы. Задавшись дополнительными ограничениями на критерии, выделить из паретовского множества наилучшую альтернативу. Дать геометрическую интерпретацию паретовского множества.

Исходные данные по вариантам

	Вариант 1			**Вариант 2**			**Вариант 3**			**Вариант 4**			**Вариант 5**		
n\m	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3
1	11	10	13	14	12	11	13	14	11	15	13	12	14	13	13
2	15	11	14	13	10	12	12	14	11	11	10	12	13	13	12
3	13	13	11	15	12	12	14	13	12	11	14	12	12	13	10
4	12	12	13	15	12	13	14	13	14	15	14	11	13	14	10
5	14	14	11	13	14	10	11	13	12	12	13	12	12	14	13
6	13	15	15	12	11	14	14	12	13	13	10	14	14	12	12
7	12	11	15	14	13	12	12	15	14	14	10	12	12	10	10
8	13	11	12	12	13	13	13	12	10	12	13	11	15	11	12
9	11	14	11	12	10	12	11	13	11	13	11	13	12	15	11
10	13	14	14	13	10	13	13	13	13	11	14	11	11	10	13
11	14	11	11	11	13	12	14	14	14	11	12	12	11	13	13
12	12	11	15	10	14	15	14	12	10	14	14	10	14	14	12
	Вариант 6			**Вариант 7**			**Вариант 8**			**Вариант 9**			**Вариант 10**		
n\m	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3
1	12	11	13	13	11	11	11	11	11	14	12	13	10	15	14
2	13	14	10	13	12	12	10	15	11	15	11	12	14	11	10
3	12	14	14	12	12	10	11	13	10	10	13	12	14	12	11
4	11	12	14	12	11	11	13	15	11	14	13	15	14	12	13
5	14	11	13	12	15	13	12	11	13	15	14	11	10	14	15
6	14	11	13	13	12	13	10	12	12	12	12	13	13	11	14
7	13	14	11	13	12	13	13	13	13	15	14	11	12	10	13
8	15	12	10	13	15	11	12	12	14	12	11	14	15	12	15
9	14	14	10	12	13	10	14	14	13	13	13	11	15	14	15
10	12	14	13	10	15	11	14	13	13	12	11	14	13	13	11
11	13	15	11	14	13	14	11	11	12	13	12	11	10	12	10
12	13	13	11	10	13	13	10	11	14	12	12	11	15	15	12
	Вариант 11			**Вариант 12**			**Вариант 13**			**Вариант 14**			**Вариант 15**		
n\m	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3
1	11	12	12	11	13	11	12	10	10	12	11	15	15	12	15
2	11	12	14	12	12	12	10	13	13	13	11	11	14	13	13
3	13	14	12	11	15	12	11	13	15	11	13	12	11	15	14
4	11	14	14	12	10	12	11	14	13	13	14	13	11	13	11
5	13	11	14	12	12	12	10	10	15	13	14	12	13	14	15
6	12	14	13	14	11	12	13	14	12	11	12	12	12	11	12
7	13	12	12	13	13	14	13	15	13	12	12	12	10	11	10
8	14	12	14	14	12	13	11	12	12	12	14	13	12	14	14
9	15	12	12	13	13	11	12	10	11	13	14	15	12	13	11

10	12	13	11	11	14	13	14	12	11	14	11	11	15	11	13
11	11	14	14	14	11	13	14	12	12	14	10	12	14	12	14
12	12	10	11	13	13	12	11	14	15	10	11	11	13	11	14
	Вариант 16			**Вариант 17**			**Вариант 18**			**Вариант 19**			**Вариант 20**		
n\m	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3	f1	f2	f3
1	16	14	13	14	12	11	13	14	11	15	13	12	15	13	13
2	15	11	16	13	10	12	12	14	11	11	10	12	13	12	12
3	13	13	11	15	12	12	14	13	12	11	14	12	12	13	10
4	15	12	13	15	12	13	14	13	14	15	14	11	13	14	10
5	14	14	11	13	14	10	11	13	12	12	13	12	12	14	13
6	13	15	15	12	11	14	14	12	13	13	10	14	14	12	12
7	12	16	15	14	13	12	12	15	14	14	10	12	12	10	10
8	13	11	12	12	13	13	13	12	10	12	13	11	15	11	12
9	11	14	11	12	10	12	11	13	11	13	11	13	12	15	11
10	13	14	14	13	10	13	13	13	13	11	14	11	11	10	13
11	14	11	14	11	13	12	14	14	14	11	12	12	13	12	14
12	17	13	15	10	14	15	14	12	10	14	14	10	14	11	12

Задание 3. *Задача принятия решений на основе метода анализа иерархий (ЗПР в условиях определенности, многокритериальности).*

Постановка задачи. Пусть имеется n альтернатив и m факторов, характеризующих каждую альтернативу. Требуется определить оптимальную альтернативу, используя «Метод анализа иерархий». Самостоятельно в соответствии с вариантом сформировать исходную таблицу иерархической структуры, выбрав альтернативы, критерии, провести числовую оценку каждой альтернативы по каждому критерию.

Исходные данные по вариантам

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
Самолет пассаж.	Монитор	Компьютер	Помещение	Топливо
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
Телевизор	Проект	Автомобиль легк.	Учебный центр	Телефон
Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
Аудио-сист.	Автомобиль груз.	Планшет	Холод. Оборудование	Аппаратура
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18	Вариант 19	Вариант 20
Процессор	Вертолет	Инвентарь	Самолет военн.	Ремонтное оборудование

Задание 4. *Задача принятия решений в условиях неопределенности,*

Постановка задачи.

Имеется n типов проектов аэродрома: X1, X2, X3, …..,Xn. Эффективность выбора проекта и дальнейшей его эксплуатации зависит от ряда неопределенных факторов (курса валют, цен на материалы, транспортных расходов, погодных условий, спроса на перевозки, инфраструктуры региона и т.п.). Предположим, что можно выделить m вариантов сочетаний данных факторов. Они выступают в качестве состояний среды Y1, Y2, Y3, …,Ym, которые заранее неизвестны.

Целевая функция f(x,y), определяющая экономическую эффективность, зависит как от типа проекта, так и от состояния среды и задана в виде матрицы выигрышей:

f (Xi, Yj) = $a_i^j,\ i=\overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$,

где $\boldsymbol{a_i^j}$ - выигрыш в случае принятия i-ой альтернативы, если среда окажется в j-ом состоянии.

Требуется принять решение о выборе проекта аэродрома (выбор альтернативы), используя критерии Лапласа, Вальда и Гурвица.

Исходные данные по вариантам

вариант 1								**вариант 2**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	68	51	66	60	59	67	66	**1**	66	69	50	64	68	65	56
2	58	57	69	66	53	64	70	**2**	53	58	55	66	56	55	55
3	66	66	68	65	51	69	60	**3**	54	50	61	50	59	59	54
4	58	61	58	66	64	56	52	**4**	56	60	56	59	57	59	69
5	63	57	62	66	67	57	59	**5**	59	54	65	68	67	63	53
6	68	65	63	53	67	68	59	**6**	68	63	61	58	61	62	66
7	65	64	66	61	69	51	64	**7**	69	64	55	53	61	65	68
8	62	51	65	65	58	54	62	**8**	70	53	57	66	56	53	52
вариант 3								**вариант 4**							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	62	65	54	51	50	55	61	**1**	66	57	52	63	61	57	68
2	59	62	68	66	54	59	51	**2**	61	51	63	66	58	63	51
3	67	62	51	64	52	55	56	**3**	62	62	51	57	68	67	65
4	62	64	65	51	57	52	61	**4**	68	68	60	68	53	56	66
5	66	61	66	65	65	57	52	**5**	54	55	52	51	62	60	63
6	53	57	69	61	60	57	68	**6**	59	68	57	66	63	64	54
7	64	52	69	57	51	66	63	**7**	60	56	52	56	55	52	60
8	61	61	50	66	59	53	64	**8**	52	56	58	61	63	62	58
вариант 5								**вариант 6**							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	52	56	54	50	66	52	68	**1**	62	61	52	66	55	62	61
2	52	61	51	50	53	65	56	**2**	59	68	53	50	60	54	61
3	63	59	66	64	61	50	52	**3**	63	53	69	58	59	66	68
4	55	59	64	51	67	53	56	**4**	56	69	66	66	59	58	67
5	53	51	61	66	68	62	55	**5**	51	52	55	56	52	65	55
6	54	68	63	56	60	53	63	**6**	61	70	66	61	68	55	57

7	67	62	65	51	68	53	53	**7**	64	63	67	53	64	51	58
8	63	59	59	69	50	66	61	**8**	54	60	70	56	61	60	60
вариант 7								**вариант 8**							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	55	56	59	54	60	70	63	1	69	64	54	66	50	62	60
2	69	68	63	60	54	58	54	2	68	70	57	61	52	69	65
3	56	54	57	63	58	54	58	3	58	63	52	51	57	61	52
4	54	61	66	56	62	63	65	4	58	61	69	64	53	64	53
5	60	63	66	53	50	61	66	5	59	66	60	66	69	52	61
6	52	59	61	59	64	56	65	6	53	64	53	62	50	58	66
7	67	56	61	59	61	58	65	7	59	63	69	70	70	65	65
8	60	58	67	70	69	55	61	8	60	66	58	53	64	61	68
вариант 9								вариант 10							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	60	51	66	60	59	64	66	1	66	60	50	64	60	65	56
2	58	57	60	66	53	64	70	2	53	58	55	60	56	55	55
3	66	60	68	65	51	62	60	3	54	50	61	50	59	59	54
4	58	61	58	61	64	56	52	4	56	60	56	59	57	59	6=
5	63	57	62	61	62	57	59	5	59	54	60	60	60	63	53
6	60	60	63	53	67	65	59	6	60	63	61	58	61	62	66
7	65	64	60	61	63	51	64	7	60	64	55	53	61	65	60
8	62	51	65	65	58	54	62	8	70	53	57	60	56	53	52
вариант 11								**вариант 12**							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	62	68	54	51	50	55	61	1	60	57	52	63	61	57	60
2	59	62	68	60	54	59	51	2	61	51	63	60	58	63	51
3	67	67	51	64	52	55	56	3	62	62	51	57	60	60	65
4	62	64	65	51	57	52	61	4	68	68	60	68	53	56	66
5	60	61	66	65	65	57	52	5	54	55	52	51	62	60	63
6	53	57	60	61	60	57	63	6	59	60	57	60	63	64	54
7	64	52	69	57	51	61	63	7	60	56	52	56	55	52	60
8	61	61	50	66	59	53	64	8	52	56	58	61	63	62	58
вариант 13								**вариант 14**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	68	51	66	60	59	67	66	**1**	66	69	50	64	68	65	56
2	58	57	69	66	53	64	70	**2**	53	58	55	66	56	55	55
3	66	66	68	65	51	69	60	**3**	54	50	61	50	59	59	54
4	58	61	58	66	64	56	52	**4**	56	60	56	59	57	59	69
5	63	57	62	66	67	57	59	**5**	59	54	65	68	67	63	53
6	68	65	63	53	67	68	59	**6**	68	63	61	58	61	62	66
7	65	64	66	61	69	51	64	**7**	69	64	55	53	61	65	68
8	62	51	65	65	58	54	62	**8**	70	53	57	66	56	53	52
вариант 15								**вариант 16**							

	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	62	65	54	51	50	55	61	**1**	66	57	52	63	61	57	68
2	59	62	68	66	54	59	51	**2**	61	51	63	66	58	63	51
3	67	62	51	64	52	55	56	**3**	62	62	51	57	68	67	65
4	62	64	65	51	57	52	61	**4**	68	68	60	68	53	56	66
5	66	61	66	65	65	57	52	**5**	54	55	52	51	62	60	63
6	53	57	69	61	60	57	68	**6**	59	68	57	66	63	64	54
7	64	52	69	57	51	66	63	**7**	60	56	52	56	55	52	60
8	61	61	50	66	59	53	64	**8**	52	56	58	61	63	62	58
вариант 17								**вариант 18**							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	52	56	54	50	66	52	68	**1**	62	61	52	66	55	62	61
2	52	61	51	50	53	65	56	**2**	59	68	53	50	60	54	61
3	63	59	66	64	61	50	52	**3**	63	53	69	58	59	66	68
4	55	59	64	51	67	53	56	**4**	56	69	66	66	59	58	67
5	53	51	61	66	68	62	55	**5**	51	52	55	56	52	65	55
6	54	68	63	56	60	53	63	**6**	61	70	66	61	68	55	57
7	67	62	65	51	68	53	53	**7**	64	63	67	53	64	51	58
8	63	59	59	69	50	66	61	**8**	54	60	70	56	61	60	60
вариант 19								**вариант 20**							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	55	56	59	54	60	70	63	1	95	95	31	53	37	97	72
2	69	68	63	60	54	58	54	2	80	89	42	31	109	25	35
3	56	54	57	63	58	54	58	3	71	77	27	18	96	17	28
4	54	61	66	56	62	63	65	4	95	40	85	97	4	34	64
5	60	63	66	53	50	61	66	5	14	5	93	83	27	31	3
6	52	59	61	59	64	56	65	6	66	70	26	11	95	17	28
7	67	56	61	59	61	58	65	7	80	82	33	27	101	22	33
8	60	58	67	70	69	55	61	8	23	13	103	85	30	38	4

Задание 5. *Задача принятия решений в условиях риска*

Постановка задачи.

Имеется n типов проектов аэродрома: X1, X2, X3, …..,Xn. Эффективность выбора проекта и дальнейшей его эксплуатации зависит от состояний среды Y1, Y2, Y3, …,Ym, которые возможны с заданными вероятностями p1, p2, p3, …,pm.

Целевая функция задана в виде матрицы выигрышей A= (a_i^j), $i = \overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$,

где $\boldsymbol{a_i^j}$ - выигрыш в случае принятия i-ой альтернативы, если среда окажется в j-ом состоянии с вероятностью pj.

Требуется выбрать оптимальную альтернативу (оптимальный проект Xi*), используя критерии максимального ожидаемого выигрыша и минимального риска.

Исходные данные по вариантам

вариант 1								вариант 2							
	0,09	0,07	0,17	0,19	0,16	0,07	0,25		0,10	0,03	0,21	0,16	0,25	0,07	0,19
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7

1	68	51	66	60	59	67	66	1	66	69	50	64	68	65	56
2	58	57	69	66	53	64	70	2	53	58	55	66	56	55	55
3	66	66	68	65	51	69	60	3	54	50	61	50	59	59	54
4	58	61	58	66	64	56	52	4	56	60	56	59	57	59	69
5	63	57	62	66	67	57	59	5	59	54	65	68	67	63	53
6	68	65	63	53	67	68	59	6	68	63	61	58	61	62	66
7	65	64	66	61	69	51	64	7	69	64	55	53	61	65	68
8	62	51	65	65	58	54	62	8	70	53	57	66	56	53	52
вариант 3								вариант 4							
	0,05	0,06	0,25	0,18	0,19	0,05	0,21		0,13	0,02	0,16	0,16	0,20	0,11	0,21
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	62	65	54	51	50	55	61	1	66	57	52	63	61	57	68
2	59	62	68	66	54	59	51	2	61	51	63	66	58	63	51
3	67	62	51	64	52	55	56	3	62	62	51	57	68	67	65
4	62	64	65	51	57	52	61	4	68	68	60	68	53	56	66
5	66	61	66	65	65	57	52	5	54	55	52	51	62	60	63
6	53	57	69	61	60	57	68	6	59	68	57	66	63	64	54
7	64	52	69	57	51	66	63	7	60	56	52	56	55	52	60
8	61	61	50	66	59	53	64	8	52	56	58	61	63	62	58
вариант 5								вариант 6							
	0,10	0,05	0,19	0,19	0,16	0,06	0,26		0,07	0,03	0,18	0,20	0,22	0,10	0,20
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	52	56	54	50	66	52	68	1	62	61	52	66	55	62	61
2	52	61	51	50	53	65	56	2	59	68	53	50	60	54	61
3	63	59	66	64	61	50	52	3	63	53	69	58	59	66	68
4	55	59	64	51	67	53	56	4	56	69	66	66	59	58	67
5	53	51	61	66	68	62	55	5	51	52	55	56	52	65	55
6	54	68	63	56	60	53	63	6	61	70	66	61	68	55	57
7	67	62	65	51	68	53	53	7	64	63	67	53	64	51	58
8	63	59	59	69	50	66	61	8	54	60	70	56	61	60	60
вариант 7								вариант 8							
	0,14	0,10	0,18	0,17	0,17	0,07	0,17		0,11	0,09	0,20	0,20	0,23	0,02	0,15
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	55	56	59	54	60	70	63	1	69	64	54	66	50	62	60
2	69	68	63	60	54	58	54	2	68	70	57	61	52	69	65
3	56	54	57	63	58	54	58	3	58	63	52	51	57	61	52
4	54	61	66	56	62	63	65	4	58	61	69	64	53	64	53
5	60	63	66	53	50	61	66	5	59	66	60	66	69	52	61
6	52	59	61	59	64	56	65	6	53	64	53	62	50	58	66
7	67	56	61	59	61	58	65	7	59	63	69	70	70	65	65
8	60	58	67	70	69	55	61	8	60	66	58	53	64	61	68
вариант 9								вариант 10							
	0,08	0,02	0,25	0,12	0,24	0,02	0,27		0,12	0,02	0,23	0,16	0,17	0,04	0,25
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	60	51	66	60	59	64	66	1	66	60	50	64	60	65	56
2	58	57	60	66	53	64	70	2	53	58	55	60	56	55	55
3	66	60	68	65	51	62	60	3	54	50	61	50	59	59	54
4	58	61	58	61	64	56	52	4	56	60	56	59	57	59	6=

5	63	57	62	61	62	57	59	5	59	54	60	60	60	63	53
6	60	60	63	53	67	65	59	6	60	63	61	58	61	62	66
7	65	64	60	61	63	51	64	7	60	64	55	53	61	65	60
8	62	51	65	65	58	54	62	8	70	53	57	60	56	53	52
вариант 11								вариант 12							
	0,12	0,06	0,22	0,17	0,19	0,08	0,16		0,09	0,05	0,20	0,14	0,20	0,09	0,22
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	62	68	54	51	50	55	61	1	60	57	52	63	61	57	60
2	59	62	68	60	54	59	51	2	61	51	63	60	58	63	51
3	67	67	51	64	52	55	56	3	62	62	51	57	60	60	65
4	62	64	65	51	57	52	61	4	68	68	60	68	53	56	66
5	60	61	66	65	65	57	52	5	54	55	52	51	62	60	63
6	53	57	60	61	60	57	63	6	59	60	57	60	63	64	54
7	64	52	69	57	51	61	63	7	60	56	52	56	55	52	60
8	61	61	50	66	59	53	64	8	52	56	58	61	63	62	58
вариант 13								вариант 14							
	0,10	0,02	0,16	0,12	0,21	0,06	0,33		0,13	0,10	0,17	0,15	0,23	0,10	0,12
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	68	51	66	60	59	67	66	1	66	69	50	64	68	65	56
2	58	57	69	66	53	64	70	2	53	58	55	66	56	55	55
3	66	66	68	65	51	69	60	3	54	50	61	50	59	59	54
4	58	61	58	66	64	56	52	4	56	60	56	59	57	59	69
5	63	57	62	66	67	57	59	5	59	54	65	68	67	63	53
6	68	65	63	53	67	68	59	6	68	63	61	58	61	62	66
7	65	64	66	61	69	51	64	7	69	64	55	53	61	65	68
8	62	51	65	65	58	54	62	8	70	53	57	66	56	53	52
вариант 15								вариант 16							
	0,11	0,09	0,17	0,19	0,20	0,08	0,16		0,14	0,06	0,20	0,11	0,22	0,08	0,19
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	62	65	54	51	50	55	61	1	66	57	52	63	61	57	68
2	59	62	68	66	54	59	51	2	61	51	63	66	58	63	51
3	67	62	51	64	52	55	56	3	62	62	51	57	68	67	65
4	62	64	65	51	57	52	61	4	68	68	60	68	53	56	66
5	66	61	66	65	65	57	52	5	54	55	52	51	62	60	63
6	53	57	69	61	60	57	68	6	59	68	57	66	63	64	54
7	64	52	69	57	51	66	63	7	60	56	52	56	55	52	60
8	61	61	50	66	59	53	64	8	52	56	58	61	63	62	58
вариант 17								вариант 18							
	0,07	0,07	0,20	0,12	0,24	0,03	0,27		0,13	0,03	0,16	0,18	0,21	0,09	0,20
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	52	56	54	50	66	52	68	1	62	61	52	66	55	62	61
2	52	61	51	50	53	65	56	2	59	68	53	50	60	54	61
3	63	59	66	64	61	50	52	3	63	53	69	58	59	66	68
4	55	59	64	51	67	53	56	4	56	69	66	66	59	58	67
5	53	51	61	66	68	62	55	5	51	52	55	56	52	65	55
6	54	68	63	56	60	53	63	6	61	70	66	61	68	55	57
7	67	62	65	51	68	53	53	7	64	63	67	53	64	51	58
8	63	59	59	69	50	66	61	8	54	60	70	56	61	60	60

вариант 19								вариант 20							
	0,11	0,03	0,21	0,10	0,20	0,05	0,29		0,15	0,01	0,25	0,2	0,25	0,12	0,02
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7		Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	55	56	59	54	60	70	63	1	95	95	31	53	37	97	72
2	69	68	63	60	54	58	54	2	80	89	42	31	109	25	35
3	56	54	57	63	58	54	58	3	71	77	27	18	96	17	28
4	54	61	66	56	62	63	65	4	95	40	85	97	4	34	64
5	60	63	66	53	50	61	66	5	14	5	93	83	27	31	3
6	52	59	61	59	64	56	65	6	66	70	26	11	95	17	28
7	67	56	61	59	61	58	65	7	80	82	33	27	101	22	33
8	60	58	67	70	69	55	61	8	23	13	103	85	30	38	4

4 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. *Задача планирования производства как задача линейного программирования (ЗПР в условиях определенности, однокритериальности при наличии ограничений)*

Постановка задачи. Для изготовления изделий A и B используются три вида сырья. На производство единицы изделия A требуется затратить сырья первого вида a_1 кг, сырья второго вида a_2 кг, сырья третьего вида a_3 кг. На производство единицы изделия B требуется затратить сырья первого вида b_1 кг, сырья второго вида b_2 кг, сырья третьего вида b_3 кг.

Производство обеспечено сырьём первого вида в количестве p_1 кг, сырьём второго вида – в количестве p_2 кг, сырьём третьего вида – в количестве p_3 кг. Прибыль от реализации готового изделия A составляет α руб., а изделия B – β руб.

Требуется составить оптимальный план x_1^* и x_2^* объемов производства изделий A и B, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Решить тремя методами

- графо-аналитическим методом;
- с помощью инструмента «Поиск решения» в Excel;
- используя функцию Maximize в Mathcad.

Вариант 20	a1	a2	a3	b1	b2	b3	p1	p2	p3	α	β
	8	5	3	6	9	9	190	144	135	8	9

Математическая постановка задачи

Выполним математическую постановку задачи как задачи линейного программирования:

Целевая функция, определяющая суммарную прибыль, имеет вид

$$f = \alpha x_1 + \beta x_2 \to \max .$$

Система ограничений с учетом ограниченности ресурсов имеет вид

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 \le p_1,$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 \le p_2,$$

$$a_3 x_1 + b_3 x_2 \le p_3.$$

Подставив исходные данные, получим:

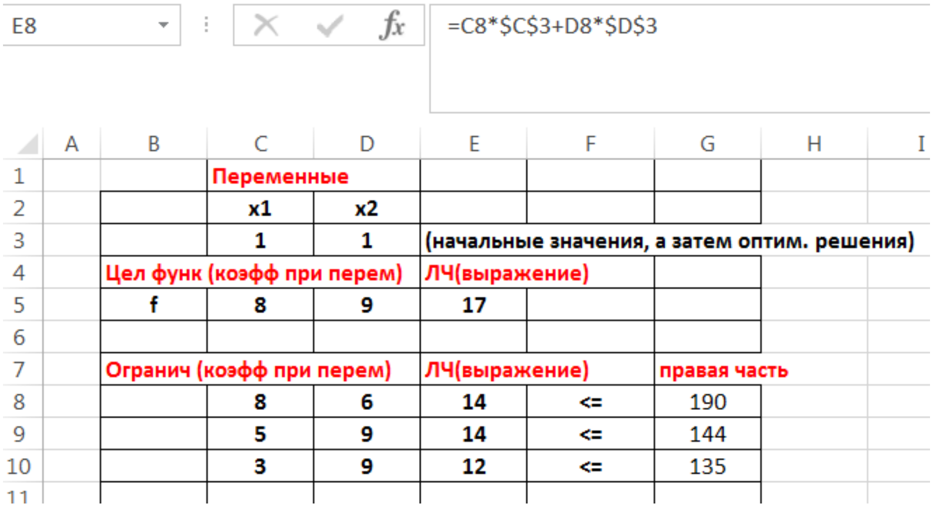
$$f = 8x_1 + 9x_2 \to \max$$
$$8x_1 + 6x_2 \le 190,$$
$$5x_1 + 9x_2 \le 144,$$
$$3x_1 + 9x_2 \le 135.$$

Выполнение задания графо-аналитическим методом

Пример выполнения задания изложен в разделе 1.1. данного пособия.

Выполнение задания в Excel

Введем необходимые исходные данные и формулы на листе Excel (рис. 4.1).



E8 =C8*C3+D8*D3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Переменные						
2			x1	x2					
3			1	1	(начальные значения, а затем оптим. решения)				
4		Цел функ (коэфф при перем)			ЛЧ(выражение)				
5		f	8	9	17				
6									
7		Огранич (коэфф при перем)			ЛЧ(выражение)		правая часть		
8			8	6	14	<=	190		
9			5	9	14	<=	144		
10			3	9	12	<=	135		
11									

Рисунок 4.1

Воспользуемся инструментом «Поиск решения». Заполним окно параметров (рис. 4.2).

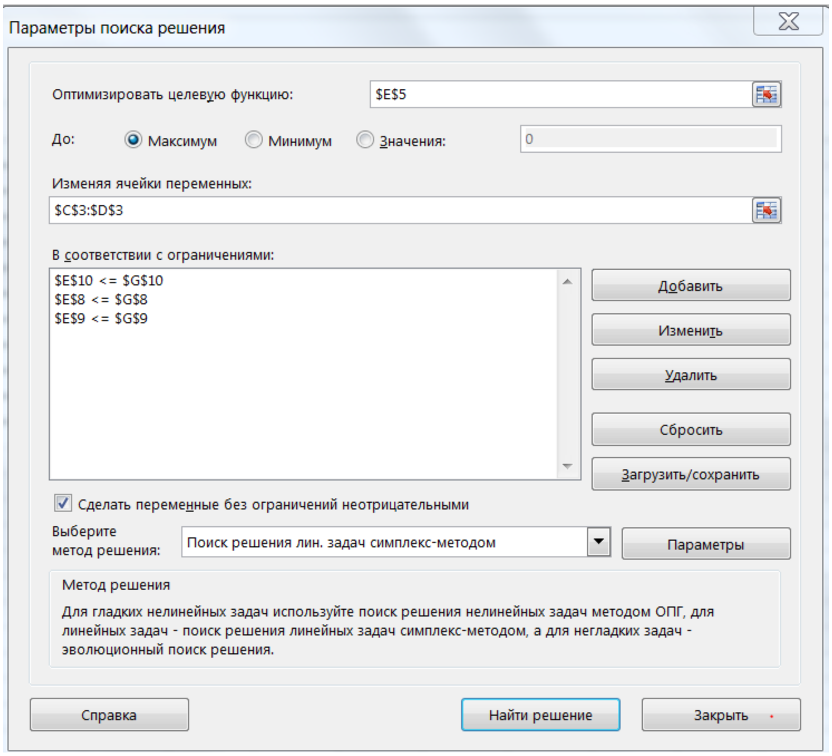


Рисунок 4.2

В результате поиска решения найдены значения неизвестных (рис. 4.3)

	Переменные				
	x1	x2			
	20.1429	4.80952	(начальные значения, а затем оптим. решения)		
Цел функ (коэфф при перем)			ЛЧ(выражение)		
f	8	9	204.429		
Огранич (коэфф при перем)			ЛЧ(выражение)		правая часть
	8	6	190	<=	190
	5	9	144	<=	144
	3	9	103.714	<=	135

Рисунок 4.3

Выполнение задания в Mathcad

Для проведения расчетов в Mathcad используется блок вычислений Given и функция поиска максимума функции Maximize (рис. 4.4).

Симплекс метод в Mathcad (АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ)

Исходные данные

$\mathbf{a1} := 8 \quad \mathbf{a2} := 5 \quad \mathbf{a3} := 3 \qquad \mathbf{b1} := 6 \quad \mathbf{b2} := 9 \quad \mathbf{b3} := 9$

$\alpha := 8 \qquad \beta := 9 \qquad \mathbf{p1} := 190 \quad \mathbf{p2} := 144 \quad \mathbf{p3} := 135$

$\mathbf{Y}(\mathbf{x1}, \mathbf{x2}) := \alpha \cdot \mathbf{x1} + \beta \cdot \mathbf{x2}$

$\mathbf{x1} := 0 \qquad \mathbf{x2} := 0$ начальное приближение

Given блок вычислений

$\mathbf{a1} \cdot \mathbf{x1} + \mathbf{b1} \cdot \mathbf{x2} \le \mathbf{p1}$

$\mathbf{a2} \cdot \mathbf{x1} + \mathbf{b2} \cdot \mathbf{x2} \le \mathbf{p2}$

$\mathbf{a3} \cdot \mathbf{x1} + \mathbf{b3} \cdot \mathbf{x2} \le \mathbf{p3}$

$\mathbf{x1} \ge 0 \qquad \mathbf{x2} \ge 0$

$\begin{pmatrix} \mathbf{x1} \\ \mathbf{x2} \end{pmatrix} := \mathbf{Maximize}(\mathbf{Y}, \mathbf{x1}, \mathbf{x2}) \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{x1} \\ \mathbf{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.143 \\ 4.81 \end{pmatrix}$

максимальное значение функции в области допустимых решений

$\mathbf{Y}(\mathbf{x1}, \mathbf{x2}) = 204.429$

Рисунок 4.4

Вывод. Оптимальные объемы выпуска предприятием продукции А и В с учетом округления из условия максимума прибыли в условиях ограниченности ресурсов равны $x_1^* = 20$, $x_2^* = 5$.

Задание 2. *Задача принятие решений на основе паретовского множества (ЗПР в условиях определенности и многокритериальности)*

Вариант 20		
f1	f2	f3
15	13	13
13	12	12
12	13	10
13	14	10
12	14	13
14	12	12
12	10	10
15	11	12
12	15	11
11	10	13
13	12	14

Постановка задачи. Качество работы предприятия определяется m критериями f1,f2, …fm. Наилучшими значениями критериев являются их максимальные значения. В результате исследований при разных условиях работы предприятия найдены значения критериев для n случаев. Назовем каждый из случаев альтернативой. Найти среди них парето-оптимальные альтернативы. Задавшись дополнительными ограничениями на критерии, выделить из паретовского множества наилучшую альтернативу.

Выполнение задания

Построим точечные графики в Excel в координатных осях f1-f2, f1-f3, f2-f3, чтобы наглядно представить доминируемые и доминирующие альтернативы (рис. 4.5). Видно, что точки-альтернативы № 7, 10, 3 являются доминируемыми другими точками на всех графиках, так как существуют другие точки, для которых значения всех критериев не хуже и хотя бы по одному критерию лучше (больше). Точки № 9,11,1, 8 являются очевидно доминирующими, так как существуют критерии, по которым значения в этих точках наилучшие. Паретовскими могут быть также точки, в которых ни по одному из критериев значения не являются наилучшими, но по всем критериям значения «не самые худшие». При большом количестве точек и критериев визуально найти паретовское множество затруднительно.

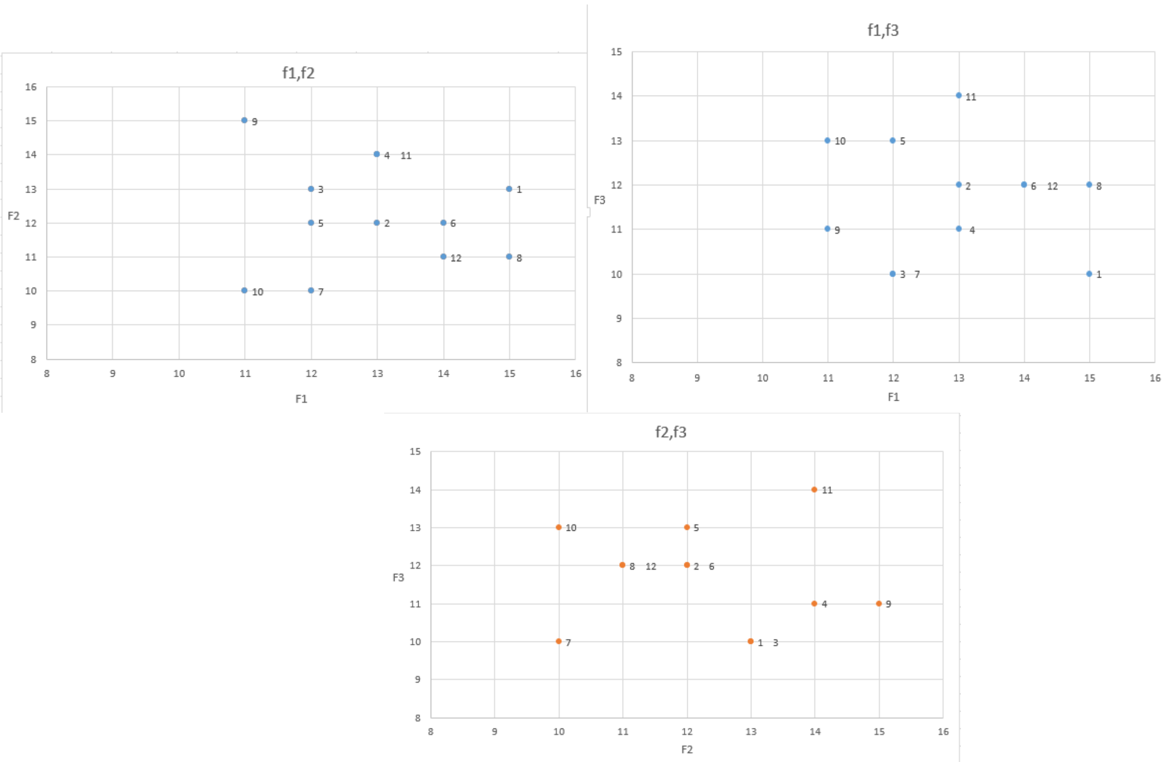


Рисунок 4.5

Найдем паретовское множество алгоритмически, используя описанный в разделе 1.2 алгоритм. В соответствии с исходными данными составим таблицу 1, в которую рядом со значениями критериев поместим соответствующие номера альтернатив. Далее расположим альтернативы (ранжируем) в порядке убывания (ухудшения) значений критериев (таблица 2) на рис. 4.6.

fi опт max

Исходные данные

табл 1, порядк номер	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3
1	1	15	1	13	1	10
2	2	13	2	12	2	12
3	3	12	3	13	3	10
4	4	13	4	14	4	11
5	5	12	5	12	5	13
6	6	14	6	12	6	12
7	7	12	7	10	7	10
8	8	15	8	11	8	12
9	9	11	9	15	9	11
10	10	11	10	10	10	13
11	11	13	11	14	11	14
12	12	14	12	11	12	12

Упорядочение альтернатив по убыванию значений критериев

табл 2	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3	номера доминирующих точек-альтернатив (Паретовских)	номера доминируемых точек-альтернатив
1	1	15	9	15	11	14		
2	8	15	4	14	5	13		
3	12	14	11	14	10	13		
4	6	14	1	13	2	12		
5	2	13	3	13	6	12		
6	4	13	2	12	8	12		
7	11	13	6	12	12	12		
8	3	12	5	12	4	11		
9	5	12	8	11	9	11		
10	7	12	12	11	1	10		
11	9	11	7	10	3	10		
12	10	11	10	10	7	10	1	3, 7

Рисунок 4.6

Будем отбирать паретовские точки, зафиксировав один из критериев, например, f1 (можно было зафиксировать любой из критериев).

Замечание. Если для нескольких точек значение фиксированного критерия f1 одинаково, то, возможно, точки в таблице нужно переставить, чтобы не оказалась доминируемая точка выше доминирующей.

Если сравнить точки №1 и № 8 в табл.2 по всем критериям, то можно увидеть, что точка №1 не является доминируемой точкой №8, поэтому переставлять эти точки не надо. Выберем одну точку №1 в таблице 2 с наибольшим значением критерия f1, эта точка будет паретовской. Выделим ее цветом для всех критериев. Точку №8 пока выбирать не надо, так как по алгоритму на каждом шаге только одна точка попадает в паретовское множество.

Просматривая таблицу по остальным критериям, исключим доминируемые точкой №1 альтернативы №3,7 (значения всех критериев в этих точках не лучше). Переходим к таблице 3, в которой доминируемые альтернативы №3,7 исключены, а паретовская точка №1 выделена желтым цветом. Она как паретовская будет оставаться во всех последующих таблицах.

Выберем следующую точку №8 по критерию f1 (рис. 4.7). Выделим ее цветом как новую паретовскую точку. Исключим доминируемую этой точкой альтернативу № 12. Альтернатива №10 не является доминируемой, так как по критерию f3 она лучше, чем №8.

табл 3	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3	номера доминирующих точек-альтернатив (Паретовских)	номера доминируемых точек
1	1	15	9	15	11	14		
2	8	15	4	14	5	13		
3	12	14	11	14	10	13		
4	6	14	1	13	2	12		
5	2	13	2	12	6	12		
6	4	13	6	12	8	12		
7	11	13	5	12	12	12		
8	5	12	8	11	4	11		
9	9	11	12	11	9	11		
10	10	11	10	10	1	10	1,8	12

табл 4	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3	номера доминирующих точек-альтернатив (Паретовских)	номера доминируемых точек
1	1	15	9	15	11	14		
2	8	15	4	14	5	13		
3	6	14	11	14	10	13		
4	2	13	1	13	2	12		
5	4	13	2	12	6	12		
6	11	13	6	12	8	12		
7	5	12	5	12	4	11		
8	9	11	8	11	9	11		
9	10	11	10	10	1	10		
							1,8,6	2

Рисунок 4.7

Переходим к таблице 4, исключая альтернативу № 12 из рассмотрения. Найденные ранее паретовские точки выделяем желтым цветом.

Процесс продолжаем (рис. 4.8) по алгоритму, пока в таблице не останутся только паретовские точки № 1,4,6,8,9,11 (паретовское множество). Каждая из этих точек «неулучшаемая» по всем критериям одновременно, т.е. для нее не существует на этом множестве таких точек, которые по всем критериям не хуже, а хотя бы одному критерию лучше, чем эта точка.

табл 5	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3	номера доминирующих точек (Паретовских)	номера доминируемых точек
1	1	15	9	15	11	14		
2	8	15	4	14	5	13		
3	6	14	11	14	10	13		
4	4	13	1	13	6	12		
5	11	13	6	12	8	12		
6	5	12	5	12	4	11		
7	9	11	8	11	9	11		
8	10	11	10	10	1	10		
							1,8,6,4	нет

табл 6	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3	номера доминирующих точек (Паретовских)	номера доминируемых точек
1	1	15	9	15	11	14		
2	8	15	4	14	5	13		
3	6	14	11	14	10	13		
4	4	13	1	13	6	12		
5	11	13	6	12	8	12		
6	5	12	5	12	4	11		
7	9	11	8	11	9	11		
8	10	11	10	10	1	10		
							1,8,6,4,11	5,10

Паретовское множество, упорядоченное по значениям критер

табл 7	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3	номера доминирующих точек (Паретовских)
1	1	15	9	15	11	14	
2	8	15	4	14	6	12	
3	6	14	11	14	8	12	
4	4	13	1	13	4	11	
5	11	13	6	12	9	11	
6	9	11	8	11	1	10	
							1,8,6,4,11,9

Паретовское множество, упорядоченное по номерам точек

табл 8	номера альтернатив	f1	номера альтернатив	f2	номера альтернатив	f3
1	1	15	1	13	1	10
2	4	13	4	14	4	11
3	6	14	6	12	6	12
4	8	15	8	11	8	12
5	9	11	9	15	9	11
6	11	13	11	14	11	14

Рисунок 4.8

Количесво паретовских альтернатив уменьшим, вводя дополнительное ограничение на значения критериев f1,f2,f3>11.

ограничения f1,f2,f3>11

табл 9		f1		f2		f3
1	6	14	6	12	6	12
2	11	13	11	14	11	14

Рисунок 4.9

После введения ограничений осталось две альтернативы №6,11. Заметим, что изначально по графикам альтернатива №6 не рассматривалась как доминирующая, так как ни по одному из критериев в этой альтернативе не было максимума. Если ввести дополнительное ограничение f1,f2,f3>12, то останется одна альтернатива №11.

Вывод. С помощью алгоритма найдено паретовское множество альтернатив с номерами 1,4,6,8,9,11 . В этих случаях следует оценивать работу предприятия как более предпочтительную.

С учетом дополнительно введенных ограничений на критерии найдено, что самой предпочтительной является случай №11 работы предприятия.

Задание 3. *Задача принятия решений на основе метода анализа иерархий (ЗПР в условиях определенности, многокритериальности)*

Постановка задачи. Пусть имеется n (n≥4) альтернатив и m факторов (m≥6), характеризующих каждую альтернативу. Требуется определить оптимальную альтернативу, используя «Метод анализа иерархий». Самостоятельно в соответствии с вариантом сформировать исходную таблицу иерархической структуры, выбрав альтернативы, критерии, провести числовую оценку каждой альтернативы по каждому критерию.

Вариант 20
Ремонтное оборудование

Выполнение задания

В соответствии с вариантом требуется осуществить обоснованный выбор нового ремонтного оборудования, используя Метод анализа иерархий. Пусть имеется 4 альтернативы и 6 факторов (критериев), по которым будут сравниваться альтернативы. Составим исходную таблицу (рис. 4.10), проводя числовую оценку каждой альтернативы по выбранным критериям: «Бренд», «Стоимость», «Гарантийные обязательства», «Сложность установки и наладки», «Наличие специалистов» и т.д. Числовые оценки проставлены в виде баллов для всех критериев, кроме стоимости: чем лучше значение критерия, тем выше балл. Для стоимости наоборот: чем меньше стоимость, тем лучше.

1) Исходная таблица (большая оценка соответствует лучшему варианту)

Ремонтное оборудование	бренд (оценка)	стоимость (млн. руб)	гарантийные обязательства (оценка)	сложность установки и наладки (оценка)	наличие специалистов (оценка)	функционал (оценка)
Альтернатива 1	5	3	5	4	4	4
Альтернатива 2	4	2	3	3	2	5
Альтернатива 3	3	2	4	5	4	3
Альтернатива 4	5	2,5	4	2	3	4

Рисунок 4.10

Составим матрицу парных сравнений факторов (рис. 4.11) или матрицу рангов, выполняя следующие условия, опираясь на теоретические положения, изложенные в разделе 1.2.

2) Матрица рангов (парных сравнений факторов).Оценка весомости факторов.

	функционал	стоимость	бренд	наличие специалистов	сложность установки и наладки	гарантийные обязательства	СРГЕОМ	Вес фактора
функционал	1,00	2,00	5,00	6,00	6,00	8,00	3,77194555	0,43796003
стоимость	0,50	1,00	3,00	3,00	5,00	5,00	2,19714518	0,2551102
бренд	0,20	0,33	1,00	2,00	3,00	5,00	1,12246205	0,1303289
наличие специалистов	0,17	0,33	0,50	1,00	2,00	3,00	0,74183638	0,08613451
установки и наладки	0,17	0,20	0,33	0,50	1,00	2,00	0,47238154	0,05484815
гарантийные обязательства	0,13	0,20	0,20	0,33	0,50	1,00	0,30676311	0,03561822
сумма рангов	2,158333333	4,066666667	10,03333333	12,83333333	17,5	24	8,61253379	1

Рисунок 4.11

Рассчитаем отношение согласованности матрицы парных сравнений факторов.

Результаты расчетов ОС в соответствии с алгоритмом, описанным в разделе 1.2 приведены на рис. 4.12. Получено ОС=0,0339<0,1, что свидетельствует об отсутствии противоречий при расстановке рангов.

Кол-во факторов m	6	Случайный индекс (дано в табл)	1,24	ПС=	6,210417859	ИС=	0,04208357	ОС=	0,033938364

Количество факторов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайный индекс (СИ)	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

ПС - сумма произведений весов критериев (факторов) на сумму рангов в столбцах таблицы рангов

$ИС = \frac{ПС-m}{m-1}$, $ОС = \frac{ИС}{СИ}$

так как ОС < 0,1, то оценки не имеют значительных противоречий и могут быть приняты для дальнейших расчетов.

Рисунок 4.12

Далее заполним матрицы парных сравнений альтернатив по каждому из факторов-критериев (6 таблиц) (рис.4.13 - 4.14). По аналогии с расчетом весов рассчитаем оценки альтернатив. Отношение согласованности не рассчитано для последующих таблиц, но желательно его рассчитывать.

4) Сравнение оборудования по фактору Функционал						
	Альтерн. 2	Альтерн. 1	Альтерн. 4	Альтерн. 3	СРГЕОМ	Оценка альтернативы
Альтерн. 2	1,00	3,00	3,00	6,00	2,710806011	0,524041608
Альтерн. 1	0,33	1,00	2,00	4,00	1,277886208	0,247035583
Альтерн. 4	0,33	0,50	1,00	3,00	0,840896415	0,162558556
Альтерн. 3	0,17	0,25	0,33	1,00	0,343294524	0,066364252
сумма	1,83	4,75	6,33	14,00	5,172883159	1

5) Сравнение оборудования по фактору Стоимость						
	Альтерн. 2	Альтерн. 3	Альтерн. 4	Альтерн. 1	СРГЕОМ	Оценка альтернативы
Альтерн. 2	1,00	1,00	7,00	9,00	2,817313247	0,479981611
Альтерн. 3	1,00	1,00	3,00	7,00	2,140695143	0,364707157
Альтерн. 4	0,14	0,33	1,00	4,00	0,660632864	0,112551072
Альтерн. 1	0,11	0,14	0,25	1,00	0,250986212	0,04276016
сумма	2,25	2,48	11,25	21,00	5,869627466	1

6) Сравнение оборудования по фактору Бренд						
	Альтерн. 1	Альтерн. 4	Альтерн. 2	Альтерн. 3	СРГЕОМ	Оценка альтернативы
Альтерн. 1	1,00	1,00	4,00	8,00	2,37841423	0,454579411
Альтерн. 4	1,00	1,00	3,00	4,00	1,861209718	0,355727613
Альтерн. 2	0,25	0,33	1,00	2,00	0,638943104	0,122119342
Альтерн. 3	0,13	0,25	0,50	1,00	0,353553391	0,067573634
сумма	2,38	2,58	8,50	15,00	5,232120443	1

Рисунок 4.13

7) Сравнение оборудования по фактору Наличие специалистов						
	Альтерн. 1	Альтерн. 3	Альтерн. 4	Альтерн. 2	СРГЕОМ	Оценка альтернативы
Альтерн. 1	1,00	1,00	7,00	8,00	2,7355648	0,455336941
Альтерн. 3	1,00	1,00	5,00	7,00	2,432299279	0,404858153
Альтерн. 4	0,14	0,20	1,00	4,00	0,581430737	0,096779609
Альтерн. 2	0,13	0,14	0,25	1,00	0,258486577	0,043025297
сумма	2,38	2,58	8,50	15,00	6,007781393	1

8) Сравнение оборудования по фактору Сложность установки и наладки						
	Альтерн. 3	Альтерн. 1	Альтерн. 2	Альтерн. 4	СРГЕОМ	Оценка альтернативы
Альтерн. 3	1,00	4,00	6,00	7,00	3,600205744	0,597938316
Альтерн. 1	0,25	1,00	3,00	6,00	1,456475315	0,241897952
Альтерн. 2	0,17	0,33	1,00	4,00	0,686589048	0,114031788
Альтерн. 4	0,14	0,17	0,25	1,00	0,277761903	0,046131943
сумма	2,38	2,58	8,50	15,00	6,02103201	1

9) Сравнение оборудования по фактору Гарантийные обязательства						
	Альтерн. 1	Альтерн. 3	Альтерн. 4	Альтерн. 2	СРГЕОМ	Оценка альтернативы
Альтерн. 1	1,00	4,00	4,00	7,00	3,253153123	0,568839183
Альтерн. 3	0,25	1,00	4,00	5,00	1,495348781	0,261473391
Альтерн. 4	0,25	0,25	1,00	3,00	0,658037006	0,1150629
Альтерн. 2	0,14	0,20	0,33	1,00	0,312393994	0,054624525
сумма	2,38	2,58	8,50	15,00	5,718932905	1

Рисунок 4.14

Для нахождения наилучшей альтернативы вычислим глобальные приоритеты (рейтинги) как сумму произведений весов факторов на оценки альтернатив. В итоге получим, что лучшей оказалась альтернатива № 2 (рис. 4.15).

10) определение итоговых (глобальных) рейтингов альтернатив

Факторы	Вес фактора	Оценки автомобиля				Оценки, умноженные на веса					
		Альтерн. 1	Альтерн. 2	Альтерн. 3	Альтерн. 4	Альтерн. 1	Альтерн. 2	Альтерн. 3	Альтерн. 4		
функционал	0,437960029	0,247	0,524	0,066	0,163	0,108191711	0,22950928	0,02906489	0,07119415		
стоимость	0,255110195	0,043	0,480	0,365	0,113	0,010908553	0,1224482	0,09304051	0,028712926		
бренд	0,130328899	0,455	0,122	0,068	0,356	0,059244834	0,01591568	0,0088068	0,046361588		
наличие специалистов	0,08613451	0,455	0,043	0,405	0,097	0,039220224	0,00370596	0,03487226	0,008336064		
сложность установки и наладки	0,054848149	0,242	0,114	0,598	0,046	0,013267655	0,00625443	0,03279581	0,002530252		
гарантийные обязательства	0,035618218	0,569	0,055	0,261	0,115	0,020261038	0,00194563	0,00931322	0,004098335		
Глобальный Рейтинг оборудования	-	-	-	-	-	0,251094015	0,37977918	0,20789349	0,161233315	1	сумма рейтингов
							Лучший глобальный рейтинг				

Рисунок 4.15

Вывод. Составлена исходная таблица иерархической структуры для принятия решения на основе метода анализа иерархий. Составлены матрицы парных сравнений для определения весов критериев и оценок альтернатив, по которым найдены глобальные рейтинги альтернатив. Установлено, что при заданной иерархической структуре лучшей является альтернатива № 2.

Задание 4. *Задача принятия решений в условиях неопределенности,*

Постановка задачи.

Имеется n типов проектов аэродрома: X1, X2, X3, …..,Xn. Эффективность выбора проекта и дальнейшей его эксплуатации зависит от ряда неопределенных факторов (курса валют, цен на материалы, транспортных расходов, погодных условий, спроса на перевозки, инфраструктуры региона и т.п.). Предположим, что можно выделить m вариантов сочетаний данных факторов. Они выступают в качестве состояний среды Y1, Y2, Y3, …,Ym, которые заранее неизвестны.

Целевая функция f(x,y), определяющая экономическую эффективность, зависит как от типа проекта, так и от состояния среды и задана в виде матрицы выигрышей:

f (Xi, Yj) = $a_i^j,\ i = \overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$,

где $\boldsymbol{a_i^j}$ - выигрыш в случае принятия i-ой альтернативы, если среда окажется в j-ом состоянии.

Требуется выбрать оптимальную альтернативу (оптимальный проект Xi*), используя критерии Лапласа, Вальда и Гурвица.

вариант 20							
	Y 1	Y 2	Y 3	Y 4	Y 5	Y 6	Y 7
X 1	95	95	31	53	37	97	72
X 2	80	89	42	31	109	25	35
X 3	71	77	27	18	96	17	28
X 4	95	40	85	97	4	34	64
X 5	14	5	93	83	27	31	3
X 6	66	70	26	11	95	17	28
X 7	80	82	33	27	101	22	33
X 8	23	13	103	85	30	38	4

Количество состояний среды m=7, количество альтернатив n=8.

Выполнение задания

Найдем оптимальную альтернативу по критерию Лапласа (рис. 4.16), в котором принимается гипотеза о «равновозможности» состояний среды и оптимальная альтернатива $\boldsymbol{i}^*$выбирается из условия

$$\boldsymbol{L(i^*) = \max_i \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_i^j}.$$

В результате расчетов в Excel по этому критерию оптимальной оказалась альтернатива 1.

Таблица 1 Критерий Лапласа(макс(ср выигрыш))

Таблица 1 Критерий Лапласа	состояния среды / альтернативы	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Сумма	Среднее	№ альтернативы
1	1	95	95	31	53	37	97	72	480	68.5714	1
2	2	80	89	42	31	109	25	35	411	58.7143	2
3	3	71	77	27	18	96	17	28	334	47.7143	3
4	4	95	40	85	97	4	34	64	419	59.8571	4
5	5	14	5	93	83	27	31	3	256	36.5714	5
6	6	66	70	26	11	95	17	28	313	44.7143	6
7	7	80	82	33	27	101	22	33	378	54	7
8	8	23	13	103	85	30	38	4	296	42.2857	8
							оптим альтернатива			68.5714	1

Рисунок 4.16

Найдем оптимальную альтернативу по критерию «крайнего пессимизма» Вальда (рис. 4.17), в котором принимается гипотеза: «надо рассчитывать на самый худший возможный вариант состояния среды» и оптимальная альтернатива $\boldsymbol{i}^*$ выбирается из условия

$$\boldsymbol{W(i^*) = \max_i \min_j a_i^j}.$$

В результате расчетов в Excel по этому критерию оптимальной оказалась альтернатива 1.

Таблица 2 Критерий Вальда(макс(мин выигрыш))

Порядковые номера	состояния среды / альтернативы	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Минимум	№ альтернативы
1	1	95	95	31	53	37	97	72	31	1
2	2	80	89	42	31	109	25	35	25	2
3	3	71	77	27	18	96	17	28	17	3
4	4	95	40	85	97	4	34	64	4	4
5	5	14	5	93	83	27	31	3	3	5
6	6	66	70	26	11	95	17	28	11	6
7	7	80	82	33	27	101	22	33	22	7
8	8	23	13	103	85	30	38	4	4	8
						оптим альтернатива			31	1

Рисунок 4.17

Найдем оптимальную альтернативу по критерию Гурвица (рис. 4.18), в котором учитывается показатель пессимизма α, и принимается гипотеза: «наихудший для принимающего решения вариант реализуется с вероятностью α, а наилучший – с вероятностью $1-\alpha$ » и оптимальная альтернатива $\boldsymbol{i}^*$ выбирается из условия

$$\boldsymbol{H(i^*) = \max_i \left(\alpha \min_j a_i^j + (1-\alpha)\max_j a_i^j\right)}.$$

По этому критерию при $\alpha \le 0{,}6$ оптимальной оказалась альтернатива 2.

При $\alpha=1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда с оптимальной альтернативой 1.

Таблица 3 Критерий Гурвица(макс(взвеш сумма мин и макс выигрышей))												
Порядковые номера	состояния среды / альтернативы	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Минимум	Максимум	Критерий Гурвица	№ альтернативы
1	1	95	95	31	53	37	97	72	31	97	57.4	1
2	2	80	89	42	31	109	25	35	25	109	58.6	2
3	3	71	77	27	18	96	17	28	17	96	48.6	3
4	4	95	40	85	97	4	34	64	4	97	41.2	4
5	5	14	5	93	83	27	31	3	3	93	39	5
6	6	66	70	26	11	95	17	28	11	95	44.6	6
7	7	80	82	33	27	101	22	33	22	101	53.6	7
8	8	23	13	103	85	30	38	4	4	103	43.6	8
Альфа								оптим альтернатива			58.6	2
0.6												

Рисунок 4.18

Вывод. Выполнено сравнение альтернатив в условиях неопределенного состояния среды при известной матрице выигрышей по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица. По первым двум критериям оптимальной оказалась 1 альтернатива, следовательно, оптимальным является проект аэродрома, соответствующий этой альтернативе. По критерию Гурвица при уменьшении показателя пессимизма $\alpha \leq 0{,}6$ оптимальной становится альтернатива 2 (при большем риске). Следовательно, принимающему решение о проекте аэродрома следует выбирать между этими двумя альтернативами.

Задание 5. *Задача принятия решений в условиях риска*

Постановка задачи.

Имеется n типов проектов аэродрома: X1, X2, X3, …..,Xn. Эффективность выбора проекта и дальнейшей его эксплуатации зависит от состояний среды Y1, Y2, Y3, …,Ym, которые возможны с заданными вероятностями p1, p2, p3, …,pm.

Целевая функция задана в виде матрицы выигрышей A= $\left(a_i^j\right),\ i=\overline{1,n}$, j=$\overline{1,m}$,

где $\boldsymbol{a_i^j}$ - выигрыш в случае принятия i-ой альтернативы, если среда окажется в j-ом состоянии с вероятностью pj.

Требуется выбрать оптимальную альтернативу (оптимальный проект Xi*), используя критерии максимального ожидаемого выигрыша и минимального риска.

Вариант 20							
pj	0.15	0.01	0.25	0.2	0.25	0.12	0.02
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
X1	95	95	31	53	37	97	72
X2	80	89	42	31	109	25	35
X3	71	77	27	18	96	17	28
X4	95	40	85	97	4	34	64
X5	14	5	93	83	27	31	3
X6	66	70	26	11	95	17	28
X7	80	82	33	27	101	22	33
X8	23	13	103	85	30	38	4

Выполнение задания

Будем искать решение, используя критерии максимального ожидаемого выигрыша, минимального риска, паретовское множество по этим двум критериям.

Числовой оценкой ожидаемого выигрыша будем считать математическое ожидание

$\boldsymbol{M(\xi i)}$ случайного выигрыша для каждой альтернативы. Оптимальная альтернатива $\boldsymbol{i^*}$ выбирается из условия

$$\boldsymbol{M(i^*) = \max_i \big(M(\xi i)\big)}$$

где

$$\boldsymbol{M(\xi i) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} p_j a_i^j.}$$

Числовой оценкой риска будем считать среднеквадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma(\xi i) = \sqrt{D(\xi i)}}$ (корень из дисперсии) случайного выигрыша для каждой альтернативы. Чем меньше разброс значений выигрыша относительно его математического ожидания, тем меньше риск. Оптимальная альтернатива $\boldsymbol{i^*}$ выбирается из условия

$$\boldsymbol{\sigma(i^*) = \min_i \big(\sigma(\xi i)\big) = \min_i \sqrt{M(\xi i^2) - M^2(\xi i)},}$$

где

$$\boldsymbol{M(\xi i^2) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \left(a_i^j\right)^2.}$$

Проведем расчеты в Excel и найдем оптимальные альтернативы по критерям максимального ожидаемого выигрыша и минимального риска (рис. 4.19).

I13 =ВПР(I12;I4:J11;2;ЛОЖЬ)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7							
2		0,15	0,01	0,25	0,2	0,25	0,12	0,02	1						
3	X\Y	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7	M[ξ]	N альт.	M[ξ^2]	M^2[ξ]	σξ	N альт.	(−σξ)
4	X1	95	95	31	53	37	97	72	55,88	1	3821,1	3122,6	26,43	1	-26,43
5	X2	80	89	42	31	109	25	35	60,54	2	4742,2	3665,1	32,82	2	-32,82
6	X3	71	77	27	18	96	17	28	48,37	3	3416,9	2339,7	32,82	3	-32,82
7	X4	95	40	85	97	4	34	64	61,66	4	5282,4	3802	38,48	4	-38,48
8	X5	14	5	93	83	27	31	3	52,53	5	3867,5	2759,4	33,29	5	-33,29
9	X6	66	70	26	11	95	17	28	45,65	6	3202,2	2083,9	33,44	6	-33,44
10	X7	80	82	33	27	101	22	33	55,02	7	4075,4	3027,2	32,38	7	-32,38
11	X8	23	13	103	85	30	38	4	58,47	8	4576,9	3418,7	34,03	8	-34,03
12								Max	61,66			min	26,43		
13								впр	4			впр	1		

Рисунок 4.19

Для автоматического нахождения альтернативы, соответствующей max(Mξ) использовалась функция ВПР (вертикальный просмотр и сопоставление) с четырьмя параметрами. Получилось, что оптимальной является альтернатива 4.

Аналогично найдена альтернатива 1, соответствующая минимальным рискам.

Далее найдем паретовское множество (рис. 4.20), используя алгоритм сортировки, по этим двум критериям

								доминируемые
				сортировка в таблице				7,5,3,6
N	M[ξ]	N	σξ	N	M[ξ]	N	σξ	
1	55,88	1	26,43	4	61,66	1	26,42888	
2	60,54	2	32,82	2	60,54	7	32,37591	
3	48,37	3	32,82	8	58,47	2	32,81872	
4	61,66	4	38,48	1	55,88	3	32,82062	
5	52,53	5	33,29	7	55,02	5	33,28737	
6	45,65	6	33,44	5	52,53	6	33,44081	
7	55,02	7	32,38	3	48,37	8	34,03159	
8	58,47	8	34,03	6	45,65	4	38,47706	

доминируемые

8

N	M[ξ]	N	σξ	N	M[ξ]	N	σξ
4	61,66	1	26,43	4	61,66	1	26,42888
2	60,54	2	32,82	2	60,54	2	32,81872
8	58,47	8	34,03	1	55,88	4	38,47706
1	55,88	4	38,48				

паретовские альтернативы: 1,2,4

N	M[ξ]	σξ
1	55,88	26,43
2	60,54	32,82
4	61,66	38,48

Рисунок 4.20

Паретовскими оказались альтернативы 1,2,4.

Построим точечный график по всем альтернативам (рис. 4.21). Для того, чтобы все критерии были позитивными (критерий рисков был негативным, так как наилучшими считались минимальные, а не максимальные значения), рассмотрим вспомогательный критерий рисков с противоположным знаком (-σξ).

Рисунок 4.21

Видно, что паретовские альтернативы находятся на границе множества всех альтернатив ближе к правому верхнему углу при позитивных критериях, что соответствует геометрическому смыслу паретовского множества.

Вывод. Выполнено сравнение альтернатив в условиях риска при известной матрице выигрышей и вероятностям состояний среды, используя критерии максимального ожидаемого выигрыша, минимального риска и паретовское множество. По критерию максимального ожидаемого выигрыша оптимальной оказалась 4 альтернатива, следовательно, оптимальным является проект аэродрома, соответствующий этой альтернативе. По критерию минимального риска оптимальной оказалась альтернатива 1. В паретовское множество, кроме этих двух альтернатив, попала альтернатива 2, имеющая промежуточные значения критериев по сравнению с альтернативами 1 и 4. Следовательно, принимающему решение о проекте аэродрома следует выбирать между альтернативами 1,2,4. Заметим, что в предыдущем задании, когда не были известны вероятности состояний среды, наилучшими были альтернативы 1 и 2, причем альтернатива 2 соответствовала более рискованному выбору.

5 СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

1. http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/1329.pdf
2. https://function-x.ru/simplex_method_example_algorithm.html
3. http://rosculturexpertiza.ru/files/valuation/saati.pdf